

# CALCULABILITÉ DE LA COHOMOLOGIE ÉTALE MODULO $\ell$

David Madore et Fabrice Orgogozo.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Modèle de calcul	2
3. Courbes et polycourbes élémentaires	6
4. $K(\pi, 1)$ pro- $\ell$	7
5. Calculabilité du $H^1$	10
6. Série $\ell$ -centrale descendante et groupe fondamental	11
7. Systèmes essentiellement constants	11
8. Approximation d'un pro- $\ell$ -groupe par ses quotients finis	12
9. Calcul de la cohomologie des $K(\pi, 1)$ pro- $\ell$	14
10. Descente	14
11. Fonctorialité	15
12. Image directe par un morphisme propre	15
Références	16

## 1. INTRODUCTION

L'objectif est de démontrer les théorèmes suivants.

**1.1. Théorème.** *Il existe un algorithme calculant la cohomologie étale  $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_\ell$  d'un schéma algébrique  $X$  sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de  $\ell$ , ainsi que l'application  $H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{F}_\ell)$  déduite par fonctorialité d'un morphisme  $Y \rightarrow X$ .*

Bien entendu, il faut préciser l'énoncé et notamment ce qu'on entend par « calculer » : le modèle de calcul sera explicité dans la section 2 (voir aussi 1.6 *infra*) ; « calculer » le groupe  $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$  signifie en calculer la dimension, en fonction de  $i, \ell$  et des équations de  $X$ , et calculer l'application  $H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{F}_\ell)$  signifie en calculer le rang, et, si  $Y = X$ , une matrice.

L'énoncé précédent répond notamment à la question posée en [Poonen et al., 2012, hypothèse 7.4].

**1.2.** L'énoncé ci-dessus admet les améliorations mineures suivantes, qui seront considérées en détail dans une version ultérieure de cet article :

- on peut remplacer  $X$  et  $Y$  par des espaces algébriques au sens d'Artin ;
- on peut remplacer l'anneau des coefficients par  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  où  $n$  est inversible sur les schémas considérés ;
- on peut aussi calculer la cohomologie à support compact, et plus généralement modulo un fermé.

**1.3. Stratifications.** La première des affirmations suivantes découle immédiatement du modèle de calcul utilisé (cf. 2.4.4), et la seconde d'une généralisation facile de celui-ci :

- si les équations de  $X$  comportent des indéterminées, on peut calculer les équations des parties constructibles de l'espace (affine) de ces indéterminées correspondant à une stratification par la dimension : autrement dit, donné un morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}^r$ , on peut calculer une partition de  $\mathbb{A}^r$  en un nombre fini de parties constructibles sur chacune desquelles  $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$  a une dimension fixée, qu'on peut calculer, où  $X$  désigne une fibre en un point géométrique de la partie ; il en va de même, par exemple, du rang de  $H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{F}_\ell)$  ;
- si  $X$  est défini sur un ouvert de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , on peut calculer un  $p_0$  tel que la dimension de  $H^i(X_p, \mathbb{F}_\ell)$  ne dépende pas de  $p$  lorsque  $p \geq p_0$ , où  $X_p$  désigne une fibre géométrique au-dessus de  $p$  ; il en va de même du rang de  $H^i(X_p, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^i(Y_p, \mathbb{F}_\ell)$ .

Notons que l'existence d'une stratification (resp. d'un nombre premier  $p_0$ ) comme ci-dessus est conséquence des résultats généraux de constructibilité et commutation aux changements de base. Les démonstrations de [Illusie & Orgogozo, 2013] (resp. [Katz & Laumon, 1985, théorème 3.3.2]), de nature géométrique, devraient fournir une stratification (resp. un nombre premier  $p_0$ ) explicite qui convienne pour *chaque* nombre premier  $\ell$  inversible sur les schémas considérés.

Comme observé dans [Poonen et al., 2012, prop. 8.3], le théorème précédent a le corollaire suivant.

**1.4. Corollaire.** *Il existe un algorithme calculant la structure de la partie de torsion du groupe de cohomologie  $\ell$ -adique  $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$  d'un schéma algébrique  $X$  sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de  $\ell$ .*

On déduira du théorème 1.1 le résultat suivant, une fois définie la notion de faisceau « explicitement constructible » :

**1.5. Théorème.** *Si  $f: X \rightarrow Y$  propre et  $\mathcal{F}$  un faisceau constructible sont donnés explicitement, on peut explicitement calculer  $R^i f_* \mathcal{F}$  (pour tout  $i$ ).*

Le cas non propre et de  $Rf_*$ , agissant sur les *complexes* de faisceaux, sera considéré dans une version ultérieure.

**1.6. Remarque.** La « calculabilité » dans le titre de cet article, et le mot « algorithme calculant » dans l'énoncé du théorème 1.1 doit se comprendre au sens de Church-Turing, c'est-à-dire le fait que les fonctions annoncées soient (générales) récursives (cf. [Odifreddi, 1989, définition I.1.7]). Il est plausible que ces fonctions soient, en fait, *primitives récursives* (cf. *op. cit.*, définition I.1.6), et vraisemblablement même « élémentaires » au sens de Kalmár (c'est-à-dire de complexité bornée par une tour d'exponentielles, cf. [Odifreddi, 1999, définition VIII.7.1]), mais nous ne le démontrerons pas.

Rappelons que le fait de travailler avec des fonctions générales récursives nous permet d'effectuer des « recherches » (c'est-à-dire d'utiliser le prédicat  $\mu$  de Kleene) : si pour chaque  $m$  il existe  $n$  vérifiant une certaine propriété  $P(m, n)$  elle-même calculable, alors la fonction qui à  $m$  associe le plus petit  $n$  vérifiant  $P(m, n)$  est calculable ; nous utiliserons notamment librement ce résultat pour construire des objets géométriques (cf. 2.7.1).

**1.7. Remarque.** Notons que l'on ne sait malheureusement rien dire de la cohomologie  $\ell$ -adique, sauf dans le cas propre et lisse par des arguments de poids.

**1.8. Remerciements.** Nous remercions chaleureusement pour son aide Ofer Gabber, auquel nous sommes redevables de plusieurs arguments et suggestions utiles. Le second auteur (FO) remercie également Ahmed Abbes de ses encouragements et de son invitation à séjourner à l'IHÉS, où ce travail a été effectué dans des conditions remarquables.

## 2. MODÈLE DE CALCUL

Le but de cette partie est de définir un modèle de calcul qu'on pourrait décrire informellement comme « une machine de Turing opérant sur des éléments d'un corps arbitraire de caractéristique  $p \geq 0$  dont elle ne sait rien » (c'est-à-dire, qu'elle manipule sous forme de « boîtes noires », cf. 2.3). Pour le lecteur qui souhaiterait passer rapidement sur le formalisme de cette partie, signalons surtout le corollaire 2.3.4 qui assure que, sur un corps dont les opérations de base sont calculables au sens le plus standard, les fonctions calculables au sens défini ici le sont aussi, et le corollaire 2.4.4 qui explique que les fonctions calculables au sens défini ici sont définies par des stratifications de l'espace affine.

### 2.1. Types et parties constructibles.

**2.1.1. Définition.** Soit  $p$  un nombre premier ou bien zéro,  $\mathbb{F}_p$  le corps premier de cette caractéristique (en convenant qu'il s'agit de  $\mathbb{Q}$  lorsque  $p$  vaut 0). On appelle *formule booléenne* en les indéterminées  $X_1, \dots, X_n$  sur  $\mathbb{F}_p$  une combinaison booléenne, c'est-à-dire une combinaison par les connecteurs  $\wedge$  (et logique),  $\vee$  (ou logique) et  $\neg$  (négation logique) d'expressions de la forme  $f(X_1, \dots, X_n) = 0$  où  $f \in \mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_n]$ .

À une telle formule on associe une *partie constructible* de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  de la manière évidente (la partie associée à  $f(X_1, \dots, X_n) = 0$  est le fermé de Zariski ayant cette équation, et les parties associées à des combinaisons par les connecteurs  $\wedge, \vee, \neg$  sont obtenues respectivement par intersection, union et complémentaire des parties associées aux formules connectées).

Il sera souvent commode d'identifier une formule booléenne en  $n$  variables en la formule évidente en  $n' > n$  variables (ne faisant pas intervenir les nouvelles variables).

**2.1.2. Observation.** Les formules booléennes sur  $\mathbb{F}_p$  peuvent être manipulées par une machine de Turing. Il est algorithmique de décider si la partie constructible associée à une formule booléenne est vide (en effet, le Nullstellensatz permet de ramener cette question à celle de l'appartenance d'un polynôme à l'idéal engendré par d'autres polynômes, qui est décidable par exemple par des algorithmes de bases de Gröbner), et par conséquent, de décider de l'inclusion ou de l'égalité entre deux telles parties constructibles. On peut donc considérer que les machines de Turing peuvent manipuler directement les parties constructibles (à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ ).

**2.1.3. Remarque.** Les parties constructibles de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  sont la base d'ouverts d'une certaine topologie sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  plus fine que la topologie de Zariski (puisque tous les fermés de Zariski sont à la fois ouverts et fermés pour cette nouvelle topologie). Celle-ci s'appelle la *topologie de Stone* (ou *topologie constructible*) sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$ , qui est alors dans la terminologie des logiciens *l'espace des types* de la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , et cette topologie est *compacte* et *totalement discontinue* (cf. [Marker, 2002, lemme 4.1.8 et exemple 4.1.14] et ÉGA 1 (réédition Springer), 7.2.13 (iii)).

### 2.2. Fonctions partielles calculables.

**2.2.1. Définition.** Soit  $p$  un nombre premier ou bien zéro. On appelle *fonction partielle*  $f: \mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  *calculable au sens de Church-Turing* une fonction partielle calculable au sens de Church-Turing (au sens usuel) qui à un  $r$ -uplet d'entiers  $(i_1, \dots, i_r)$  naturels et un entier naturel  $j$  associe une formule booléenne  $\varphi_j$  (en un nombre quelconque d'indéterminées) sur  $\mathbb{F}_p$  ainsi qu'un entier naturel  $v_j$ . Si  $(x_1, \dots, x_n)$  sont des éléments d'un corps  $k$  quelconque de caractéristique  $p$  et  $(i_1, \dots, i_r)$  sont des entiers naturels, la valeur de  $f$  en  $(i_1, \dots, i_r, x_1, \dots, x_n)$  est définie comme valant  $v_j$ , où  $j$  est le plus petit entier naturel tel que

- la formule  $\varphi_j$  est définie, et  $\varphi_j(x_1, \dots, x_n)$  est vérifiée, et
- pour tout  $j' < j$ , la formule  $\varphi_{j'}$  est définie, et  $\varphi_{j'}(x_1, \dots, x_n)$  n'est pas vérifiée.

Si un tel  $j$  n'existe pas, alors la valeur de  $f$  n'est pas définie.

On définit aussi la notion de fonction partielle  $f: \mathbb{N}^r \times (\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n) \rightarrow \mathbb{N}$  calculable au sens de Church-Turing : il s'agit d'une fonction partielle calculable qui à un  $(r+1)$ -uplet  $(i_1, \dots, i_r, n)$  et un entier naturel  $j$  associe un couple  $(\varphi_j, v_j)$ , la valeur de  $f$  en  $(i_1, \dots, i_r, (x_1, \dots, x_n))$  étant définie de la même manière.

Il faut comprendre cette définition de la manière suivante : pour définir une fonction  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$ , une machine de Turing produit, pour chaque valeur des paramètres entiers  $(i_1, \dots, i_r)$ , une suite récursive de couples  $(\varphi_j, v_j)$  qui signifient « si les paramètres

$(x_1, \dots, x_n)$  vérifient  $\varphi_j$  (et aucune formule précédente), alors retourner la valeur  $v_j$  ». (Si pour un certain  $j$  la machine de Turing ne termine pas, ou bien sûr si elle renvoie autre chose qu'un couple formé d'une formule booléenne et d'un entier naturel, la valeur de la fonction est considérée comme indéfinie, sauf pour les valeurs qui ont déjà été attrapées par les  $\varphi_j$  précédents. De même, si aucune formule n'est vérifiée, la fonction n'est pas définie au point considéré.) Pour une fonction  $f: \mathbb{N}^r \times (\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n) \rightarrow \mathbb{N}$ , la dimension  $n$  doit également être passée en paramètre à la machine de Turing.

À titre d'exemple trivial (avec  $r = 0$  et  $n = 1$ ), la machine de Turing qui à  $j = 0$  associe le couple  $(\text{"x = 0"}, 0)$  et à  $j = 1$  le couple  $(\text{"¬(x = 0)"}, 1)$  définit une fonction  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1 \rightarrow \mathbb{N}$  qui, sur n'importe quel corps, vaut (l'entier naturel) 0 en (l'élément du corps) 0 et 1 ailleurs.

**2.2.2. Définition.** On appelle *fonction partielle*  $f: \mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  *calculable au sens de Church-Turing* une fonction comme en 2.2.1 mais où cette fois les  $v_j$  sont censés être des fractions rationnelles en  $n$  variables  $X_1, \dots, X_n$ , la valeur de la fonction  $f$  en  $(i_1, \dots, i_r, x_1, \dots, x_n)$  étant définie comme la valeur de la fonction rationnelle  $v_j$  en  $(x_1, \dots, x_n)$  (et indéfinie si la fonction rationnelle n'est pas définie en  $(x_1, \dots, x_n)$ ).

On définit de même les fonctions partielles calculables  $f: \mathbb{N}^r \times (\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ . Et on définit sans difficulté les fonctions partielles calculables à valeurs dans  $\mathbb{N}^s \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^m$  (ou même vers  $\bigsqcup_{m=0}^{+\infty} \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^m$ , en convenant que pour spécifier un élément de celui-ci on spécifie un  $m$  et une valeur dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^m$ , c'est-à-dire un  $m$ -uplet de fonctions rationnelles).

En particulier, les fractions rationnelles elles-mêmes sont des fonctions calculables.

**2.3. Équivalence avec le modèle « boîte noire ».** Le modèle de calcul que nous venons de définir a l'avantage qu'il définit automatiquement des fonctions valables à la fois sur tous les corps de caractéristique  $p$  (remarquons au passage que si la fonction dispose de  $n = 0$  variables d'entrées dans le corps, alors la seule sortie qu'elle puisse produire est un élément de  $\mathbb{F}_p$ ). Il n'est cependant peut-être pas évident que cette notion de calcul soit naturelle et décrive bien toutes les manipulations qu'on souhaite pouvoir effectuer algorithmiquement sur les éléments d'un corps. Pour répondre à cette crainte, nous esquissons la démonstration du fait que les fonctions calculables dans le modèle qu'on vient de définir coïncident précisément avec celles qui sont calculables par une machine de Turing qui manipulerait les éléments d'un corps non spécifié comme des « boîtes noires » sur lesquelles elle peut effectuer uniquement les opérations du corps (addition, opposé, multiplication, inverse, comparaison à zéro).

Montrons d'abord un lemme qui énonce le fait que dans les définitions 2.2.1 et 2.2.2, il revient au même de supposer que la machine de Turing qui produit la valeur finale  $v_j$  de la fonction a accès à un arbre de décision où elle peut poser des questions sur la satisfaction de formules booléennes des variables, y compris en fonction des réponses aux questions précédemment posées (c'est-à-dire, sur la base d'un arbre de décision) :

**2.3.1. Lemme.** *On obtient des définitions équivalentes à 2.2.1 et 2.2.2 si la machine de Turing considérée prend une entrée  $\gamma$  qui est un mot fini sur l'alphabet  $\{\top, \perp\}$  et renvoie soit une formule booléenne  $\psi_\gamma$  soit une valeur finale  $w_\gamma$  (qui est un entier naturel ou bien une fraction rationnelle selon le type censé être retournée par  $f$ ), la valeur de  $f$  en  $(i_1, \dots, i_r, x_1, \dots, x_n)$  étant alors définie comme  $w_\gamma$  où  $\gamma$  est l'unique mot tel que*

- la machine renvoie pour  $\gamma$  une valeur finale ( $w_\gamma$ ), et
- pour tout préfixe strict  $\gamma'$  de  $\gamma$ , la machine renvoie une formule  $\psi_{\gamma'}$ , et le symbole suivant immédiatement  $\gamma'$  dans  $\gamma$  est  $\top$  ou  $\perp$  selon que  $\psi_{\gamma'}(x_1, \dots, x_n)$  est ou n'est pas vérifiée.

(La donnée de la machine qui à  $\gamma$  associe une formule ou une valeur finale comme ci-dessus s'appellera un arbre de décision pour la fonction qu'elle calcule.)

*Démonstration.* Il est évident que cette nouvelle définition est au moins aussi puissante que la précédente (donnée une suite  $(\varphi_j, v_j)$  comme précédemment, si  $\gamma$  est un mot formé de  $j$  signes  $\perp$  suivi d'un signe  $\top$  on renvoie  $w_\gamma = v_j$ , et si  $\gamma$  est formé de  $j$  signes  $\perp$  on renvoie  $\psi_\gamma = \varphi_j$ ). Il s'agit de montrer qu'elle est, en fait, équivalente.

Il s'agit donc de définir une nouvelle machine de Turing  $M'$  qui énumère une suite  $(\varphi_j, v_j)$  en fonction de ce que renvoie la machine  $M$  calculant les  $\psi_\gamma$  ou  $w_\gamma$ . Pour cela, on va effectuer un parcours en parallèle de l'arbre de tous les calculs possibles par  $M$ . Précisément, la machine  $M'$  commence par exécuter  $M$  sur le mot vide, puis, si celle-ci termine et renvoie une formule booléenne, exécute  $M$  en parallèle sur les deux mots  $\top$  et  $\perp$ , et ainsi de suite récursivement : à chaque fois qu'une exécution de  $M$  sur un mot  $\gamma$  termine en renvoyant une formule booléenne, la machine  $M'$  exécute en parallèle  $M$  sur les deux mots obtenus en ajoutant à  $\gamma$  un symbole  $\top$  ou  $\perp$  à la fin ; en revanche, si la machine  $M$  termine en produisant une valeur finale  $w_\gamma$ , alors la machine  $M$  énumère pour prochaine valeur  $j$  le couple  $(\varphi_j, v_j)$  où  $v_j = w_\gamma$  et  $\varphi_j$  est la conjonction de toutes les formules  $\psi_{w'}$  qui ont été calculées lors des préfixes stricts  $w'$  de  $w$ .  $\square$

**2.3.2. Proposition.** *Les fonctions partielles calculables  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  au sens des définitions 2.2.1 et 2.2.2 :*

- contiennent les fonctions constantes (à valeurs dans les entiers ou les éléments de  $\mathbb{F}_p$ ) ;
- contiennent la fonction successeur sur les entiers naturels, ainsi que les opérations d'addition, opposée, multiplication et inverse et la fonction de test à zéro (qui vaut l'entier naturel 0 en 0  $\in \mathbb{A}^1$  et 1 ailleurs) ;
- contiennent les projections vers n'importe quelle variable d'entrée ;
- sont stables par composition : si  $h$  et  $g_1, \dots, g_N$  sont calculables et que la composition a un sens, alors  $h(g_1, \dots, g_N)$  est calculable ;
- sont stables par récursion primitive : si  $g$  et  $h$  sont calculables, le premier argument de  $h$  étant un entier naturel, alors la fonction  $f$ , dont le premier argument est un entier naturel, définie par  $f(0, \dots) = g(\dots)$  et  $f(u+1, \dots) = h(u, f(u, \dots), \dots)$ , est calculable — ici, les points de suspension désignent n'importe quelle combinaison de sortes de variables ;
- sont stables par recherche : si  $f$  est calculable, son premier argument étant un entier naturel, alors la fonction qui à des paramètres d'entrée  $(\dots)$  associe le plus petit  $u$  tel que  $f(u, \dots) = 0$  et que  $f(u', \dots) \neq 0$  pour tout  $u' < u$  (ce qui sous-entend que toutes ces valeurs  $f(u', \dots)$  sont définies), est calculable.

*Démonstration.* Les trois premiers points sont évidents.

Les suivants découlent du lemme précédent, c'est-à-dire qu'il est facile de fabriquer les arbres de décision des fonctions décrites d'après ceux des fonctions qui les définissent.

Par exemple, pour la composée  $h \circ g$ , on fabrique l'arbre de décision de  $h \circ g$  en attachant à la chaque feuille de l'arbre de décision de  $g$  (c'est-à-dire, dans la notation du lemme, à chaque fois qu'au mot  $\gamma$  il affecte une valeur finale  $w_\gamma$  et non une formule) une copie de l'arbre de décision de  $h$ , dans lequel les formules et éventuelles fonctions booléennes ont été composées par  $w_\gamma$  (ce qui signifie, si  $g$  renvoie des entiers, qu'on a calculé l'arbre de décision de  $h$  pour cet entier  $w_\gamma$ , et si  $g = (g_1, \dots, g_N)$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{A}^N$ , qu'on a composé toutes les formules booléennes, et éventuellement valeurs de retour si ce sont des fonctions rationnelles, dans cet arbre, par la fonction  $w_\gamma$ ).  $\square$

**2.3.3. Proposition.** *Les fonctions partielles calculables  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  au sens des définitions 2.2.1 et 2.2.2 sont le plus ensemble de telles fonctions qui possèdent les stabilités énumérées à la proposition précédente (on les appellera donc aussi fonctions calculables à partir des opérations de corps comme boîtes noires).*

*Démonstration.* On vient de voir une implication. Il s'agit maintenant de montrer que les fonctions calculables au sens des définitions 2.2.1 et 2.2.2 sont effectivement calculables à partir des opérations de corps comme boîtes noires.

Mais les fonctions calculables en ce dernier sens contiennent au moins les fonctions calculables au sens de Church-Turing, et par ailleurs contiennent toutes les fonctions rationnelles et les formules booléennes (considérées comme fonctions à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ). Il reste donc simplement à montrer qu'à partir d'une suite récursive  $(\varphi_j, v_j)$  on peut calculer la valeur finale de  $f$  : mais c'est clair en utilisant la récursion primitive et la recherche (du plus petit  $j$  tel que  $\varphi_j$  soit vrai et tous les précédents soient faux).  $\square$

On en déduit que les fonctions calculables dans notre modèle sont calculables quand on les applique à n'importe quel « corps calculable » :

**2.3.4. Corollaire.** *Si  $E$  est une partie de  $\mathbb{N}$  contenant deux éléments  $0_E$  et  $1_E$ , et  $+_E, -_E, \times_E, (-^1)_E$  des fonctions partielles calculables (au sens usuel) de  $\mathbb{N}^2, \mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{N}$  respectivement vers  $\mathbb{N}$  et qui sont totales (i.e., définies) sur  $E$  et définissent sur celui-ci une structure de corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , alors pour toute fonction partielle calculable  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  au sens des définitions 2.2.1 ou 2.2.2, la fonction partielle  $\mathbb{N}^r \times E^n \rightarrow \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^r \times E^n \rightarrow E$  qu'elle définit est calculable (au sens usuel).*

La réciproque n'est pas vraie : pour une présentation raisonnable de  $\mathbb{F}_p(T)^{\text{alg}}$  par fonctions calculables, la fonction qui à  $x$  associe 0 si  $x$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p$  et 1 si  $x$  est transcendant, sera calculable ; en revanche, la fonction  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1 \rightarrow \mathbb{N}$  qui répond à la même définition n'est pas calculable au sens de la définition 2.2.1, comme il résultera par exemple du corollaire 2.4.4 (l'ensemble des éléments transcendents sur  $\mathbb{F}_p$  n'étant, de toute évidence, pas une partie constructible de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ ).

## 2.4. Fonctions totales.

**2.4.1. Définition.** On dit qu'une fonction partielle calculable  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  (au sens des définitions 2.2.1 et 2.2.2) est *totale* lorsque sa valeur est définie pour toutes valeurs  $(i_1, \dots, i_r, x_1, \dots, x_n)$ , les  $x_1, \dots, x_n$  appartenant à n'importe quel corps  $k$  de caractéristique  $p$ .

**2.4.2. Contre-exemple :** La fonction qui à  $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  associe le degré de  $x$  sur  $\mathbb{F}_p$ , c'est-à-dire le plus petit degré d'un polynôme  $f \in \mathbb{F}_p[X]$  tel que  $f(x) = 0$ , est partielle calculable (il suffit de produire une machine de Turing qui énumère les polynômes irréductibles  $f_j$  sur  $\mathbb{F}_p$ , et renvoie le couple formé de la formule booléenne  $f_j = 0$  et l'entier  $\deg f_j$ ), mais même si elle est définie sur tout élément de  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ , elle n'est pourtant pas totale, car appliquée à l'élément  $T$  de  $\mathbb{F}_p(T)$  elle n'est pas définie. Il résulte de la proposition qui suit (ou de son corollaire) qu'il n'existe aucune manière de prolonger cette fonction en une fonction calculable totale.

**2.4.3. Proposition.** (A) *Pour qu'une fonction partielle calculable  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  soit totale, il (faut et il) suffit qu'elle soit définie pour toutes les valeurs  $(i_1, \dots, i_r, x_1, \dots, x_n)$ , où les  $x_1, \dots, x_n$  appartiennent à un corps  $K$  fixé algébriquement clos de caractéristique  $p$  et de degré de transcendance infini sur  $\mathbb{F}_p$ .*

(B) *De plus, pour une fonction totale, dans la définition 2.2.1 ou 2.2.2, il existe un  $N$  (dépendant de  $i_1, \dots, i_r$  et, évidemment, de la fonction considérée) telle qu'on puisse tronquer la suite  $(\varphi_j, v_j)$  à partir de  $N$  sans changer la fonction ainsi définie.*

*Démonstration.* Montrons (A) : si la fonction n'est pas totale, il existe  $(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{N}^r$  et un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments d'un certain corps  $k$  de caractéristique  $p$ , qu'on peut certainement supposer algébriquement clos, tels que (1) pour un certain  $j_0$ , les  $\varphi_0, \dots, \varphi_{j_0-1}$  soient définis et faux (non vérifiés) pour  $(x_1, \dots, x_n)$  mais que  $\varphi_{j_0}$  ne soit pas défini (la machine censée le produire ne termine pas), ou bien (2) les  $\varphi_j$  soient définis pour tout  $j$  et tous faux pour  $(x_1, \dots, x_n)$ . (Dans le cas inintéressant, c'est-à-dire (1), définissons comme  $0 = 1$  tous les  $\varphi_j$  pour  $j \geq j_0$ .) La suite  $\neg\varphi_0, \neg\varphi_1, \neg\varphi_2, \dots$  (réunie à la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , et en considérant  $x_1, \dots, x_n$  comme  $n$  constantes supplémentaires) admet donc un modèle  $k$  : d'après le théorème de Löwenheim-Skolem ([Marker, 2002, théorème 2.3.7]), elle admet un modèle exactement dénombrable, qui est donc un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  et de degré de transcendance  $\aleph_0$ , donc isomorphe à la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p((T_i)_{i \in \mathbb{N}})$ , qui peut donc se plonger dans le corps  $K$  fixé considéré. Il existe donc  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in K^n$  tels que la fonction ne soit pas définie en  $(i_1, \dots, i_r, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ .

Montrons (B) : le fait que la fonction soit totale implique qu'il n'existe pas de  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments d'aucun corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  qui vérifieraient  $\neg\varphi_j$  pour tout  $j$ . Autrement dit, la suite  $\neg\varphi_0, \neg\varphi_1, \neg\varphi_2, \dots$  (réunie à la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , et en considérant  $x_1, \dots, x_n$  comme  $n$  constantes supplémentaires) n'a pas de modèle : d'après le théorème de compacité de la logique du premier ordre ([Marker, 2002, théorème 2.1.4]), ou bien d'après la compacité de l'espace de Stone  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  (cf. 2.1.3), un sous-ensemble fini  $\neg\varphi_0, \dots, \neg\varphi_{N-1}$  de ces formules n'a déjà pas de modèle. On peut alors omettre tous les  $\varphi_j$  pour  $j \geq N$  dans la définition de la fonction.  $\square$

**2.4.4. Corollaire.** Une fonction calculable totale  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  est exactement la donnée d'une partition de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  en un nombre fini de parties constructibles, sur chacune desquelles la fonction prend une valeur entière.

Une fonction calculable totale  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^m$  est exactement la donnée d'une partition de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  en un nombre fini de parties constructibles, sur chacune desquelles la fonction coïncide avec une certaine fonction rationnelle (définie partout sur la partie en question).

Une fonction calculable totale  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^m$  est exactement la donnée d'une fonction calculable au sens usuel qui à toute valeur  $(i_1, \dots, i_r)$  des  $r$  premiers paramètres associe une donnée comme décrite dans les deux paragraphes précédents.

*Démonstration.* Ceci découle immédiatement du (B) de la proposition. □

**2.4.5. Remarque.** La proposition et son corollaire valent également (*mutatis mutandis*) pour des fonctions calculables totales définies sur  $\mathbb{N}^r \times E$  où  $E$  est une partie constructible de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$ , ou même sur une partie  $E$  de  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  dont la fonction indicatrice est calculable (on pourrait dire une partie réursive-constructible de  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$ ). En effet, il suffit d'appliquer ce qu'on a dit à la fonction qui coïncide avec la fonction considérée sur la partie  $E$  et qui, ailleurs que sur  $E$ , prennent une valeur spéciale.

## 2.5. Élimination des quantificateurs.

**2.5.1. Proposition.** Si  $f$  est une fonction partielle calculable  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  et  $x$  une des coordonnées de  $\mathbb{A}^n$  intervenant dans  $f$ , et si  $f^{\forall x}$  (resp.  $f^{\exists x}$ ) désigne la fonction qui à  $\underline{z} \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^{n-1}$  associe 0 si  $f(x, \underline{z})$  est défini pour tout  $x$  et vaut toujours 0, ou bien 1 si  $f(x, \underline{z})$  est défini pour tout  $x$  et ne vaut pas toujours 0, et n'est pas définie si  $f(x, \underline{z})$  n'est pas défini pour au moins un  $x$  (resp. 0 si  $f(x, \underline{z})$  est défini pour tout  $x$  et ne vaut pas toujours 0, ou bien 1 si  $f(x, \underline{z})$  est défini pour tout  $x$  et ne vaut jamais 0, et n'est pas définie si  $f(x, \underline{z})$  n'est pas défini pour au moins un  $x$ ), alors  $f^{\forall x}$  et  $f^{\exists x}$  sont calculables. (Elles sont évidemment totales quand  $f$  l'est.)

Dans cet énoncé, les mots « pour tous » ou « pour certains » portant sur  $x$  s'interprètent dans un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  quelconque.

*Démonstration.* On renvoie à [Fried & Jarden, 2008, théorème 9.3.1] pour une démonstration du résultat-clé, qui est que la projection sur un sous-ensemble des coordonnées d'une partie constructible de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  se calcule effectivement, comme partie constructible (c'est-à-dire qu'on peut calculer algorithmiquement une formule booléenne — donc sans quantificateur — qui équivaut à la formule avec quantificateur  $\exists x(\varphi(x, \dots))$  où  $\varphi$  définit la partie constructible considérée). Remarquons que ceci permet aussi de dire que la partie représentée par  $\forall x(\varphi(x, \dots))$ , qui est le complémentaire de la projection du complémentaire de la partie définie par  $\varphi$ , se calcule aussi effectivement.

Montrons maintenant le résultat annoncé. On peut évidemment supposer que  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  (quitte à la composer par la fonction de test à zéro, qu'on sait être calculable). Mettons qu'on cherche à représenter  $f^{\forall x}$  (le cas de  $f^{\exists x}$  étant complètement analogue). Soient  $(\varphi_j, v_j)$  définissant  $f$  avec les notations habituelles. Quitte à remplacer  $\varphi_j$  par sa conjonction avec la négation de tous les  $\varphi_{j'}$  antérieurs, on peut supposer que les parties constructibles qu'elles définissent sont deux à deux disjointes. On parcourt la liste des  $(\varphi_j, v_j)$  en mettant à jour, au fur et à mesure, deux parties constructibles de  $\mathbb{A}^{n-1}$ , à savoir la partie sur laquelle on sait que  $f$  est définie pour tout  $x$ , et celle sur laquelle on sait que  $f$  est définie et vaut 0 pour tout  $x$  : la première est réunie pour chaque  $j$  à la partie définie par  $\forall x(\varphi_j(x, \dots))$  (c'est-à-dire qu'on définit  $\psi_j = \psi_{j-1} \vee \varphi_j^{\forall x}$  où  $\varphi_j^{\forall x}$  est une formule booléenne équivalente à  $\forall x(\varphi_j(x, \dots))$ ), tandis que la seconde ne l'est que pour les  $j$  tels que  $v_j$  vaut 0 (i.e.,  $\psi_j^{(0)} = \psi_{j-1}^{(0)} \vee \varphi_j^{\forall x}$ ). Pour représenter  $f^{\forall x}$ , on énumère alternativement  $(\psi_j^{(0)}, 0)$  et  $(\psi_j \wedge \neg \psi_j^{(0)}, 1)$ . □

**2.5.2. Corollaire.** Si  $f$  est une fonction partielle calculable  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  et  $x$  une des coordonnées de  $\mathbb{A}^n$  intervenant dans  $f$ , et  $\max_x f$  (resp.  $\min_x f$ ) désigne la fonction qui à  $\underline{z} \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^{n-1}$  associe le maximum des  $f(x, \underline{z})$  si ceux-ci sont définis pour tout  $x$ , alors  $\max_x f$  et  $\min_x f$  sont calculables. (Elles sont évidemment totales quand  $f$  l'est.)

*Démonstration.* La fonction  $\max_x f$  peut se définir comme le plus petit  $u$  tel que  $\forall x(f(x, \underline{z}) \leq u)$ , or la fonction qui à  $u$  associe la valeur de vérité de  $\forall x(f(x, \underline{z}) \leq u)$  est calculable d'après la proposition, et d'après 2.3.2 (stabilité par recherche), la fonction qui calcule le plus petit  $u$  pour lequel cette valeur de vérité est vraie est elle-même calculable. □

**2.5.3. Remarque.** Dans la lignée de la remarque 2.4.5, on peut calculer le maximum d'une fonction calculable pour  $x$  parcourant les éléments d'une partie constructible de  $\mathbb{A}^n$ . (En effet, on peut définir modifier la fonction pour valoir  $-\infty$  en-dehors de cette partie constructible, ou adapter facilement la ou les démonstrations ci-dessus.)

## 2.6. Extension du modèle de calcul par un choix fini.

**2.6.1. Remarque.** Dans le cadre de la proposition 2.5.1, le modèle de calcul que nous avons adopté permet de tester l'existence d'un  $x$  tel que  $f(x, \underline{z}) = 0$ , mais ne permet pas, *stricto sensu*, d'en calculer un. Par exemple, si  $f$  (fonction d'une seule variable  $x$ , et à valeurs entières) est définie comme valant 0 si  $x^2 + 1 = 0$  et 1 si  $x^2 + 1 \neq 0$ , alors  $\exists x(f(x) = 0)$  est toujours vérifié, c'est-à-dire que la fonction  $f^{\exists x}$  est égale à la constante 0, et pourtant, en caractéristique 0 ou bien  $\equiv 3 \pmod{4}$ , aucun élément du corps premier, donc aucune fonction calculable constante (cf. 2.4.4), ne peut témoigner de ce fait.

En pratique, cependant, on peut faire « comme si », grâce à la convention qui suit :

**2.6.2. Convention.** Si  $E$  est un fermé non vide de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ , une fonction (partielle ou totale) calculable sur  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \times E$  (au sens précédent) sera aussi, par abus de langage, appelé fonction calculable sur  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$  dépendant de façon non-déterministe du paramètre  $x \in E$  (ceci sous-entend que la valeur de celle-ci n'a guère d'importance : toute valeur convient à la description faite de la fonction).

Plusieurs observations permettent de se convaincre que cette convention n'est pas problématique :

**2.6.3. Observation.** Si une fonction  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  (partielle ou totale) est calculable au sens de la convention ci-dessus, c'est-à-dire qu'il s'agit en fait d'une fonction calculable  $\tilde{f}: \mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \times E \rightarrow \mathbb{N}$  pour  $E$  un fermé non vide de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ , et si sa valeur (y compris le fait qu'elle soit définie ou non) ne dépend pas du tout du choix du paramètre  $x \in E$ , ce qui permet vraiment de la voir comme une fonction  $\mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$ , alors cette fonction est calculable au sens précédent. En effet,  $f: \mathbb{N}^r \times \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \rightarrow \mathbb{N}$  peut se calculer à partir de  $\tilde{f}$  comme  $\max_x \tilde{f}$  ou  $\min_x \tilde{f}$  (cf. 2.5.2).

**2.7. Opérations géométriques calculables.** Les questions ou opérations suivantes sont calculables au sens du modèle de calcul défini dans cette section :

- Donnés des éléments  $f_1, \dots, f_r \in k[Z_1, \dots, Z_d]$ , décider si le schéma affine que ces équations définissent (dans  $\mathbb{A}^d$ ) est réduit ou calculer son réduit (c'est-à-dire des équations de celui-ci), décider s'il est irréductible ou en en calculer les composantes irréductibles, décider s'il est connexe ou en calculer les composantes connexes, décider s'il est lisse ou calculer son lieu singulier, calculer sa dimension (ou les dimensions de ses composantes irréductibles).
- Donnés des éléments  $h_1, \dots, h_e \in k[Z_1, \dots, Z_d]$  représentant un morphisme  $h: \mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{A}^e$ , et deux schémas affines  $X \subseteq \mathbb{A}^d$  et  $Y \subseteq \mathbb{A}^e$  (représentés par leurs équations) et deux ouverts  $U \subseteq X$  et  $V \subseteq Y$  (représentés par des équations de leur complémentaire), décider si  $h$  définit un isomorphisme de  $U$  sur  $V$ .
- Donnés un schéma affine  $X \subseteq \mathbb{A}^d$  (représenté par ses équations) et un ouvert  $U \subseteq X$  (représenté par des équations de son complémentaire), déterminer un recouvrement de  $U$  par des ouverts affines  $V_1, \dots, V_s$  (représentés par des équations de leur complémentaire) et pour chaque  $i$  un isomorphisme entre  $V_i$  et un schéma affine  $Y_i \subseteq \mathbb{A}^e$ .
- Donnés des schémas affines  $X_1, \dots, X_p$  (représentés par leurs équations, dans des espaces affines éventuellement différents) et pour chaque  $i, i'$  un ouvert  $U_{ii'}$  de  $X_i$  et un morphisme  $\varphi_{ii'}: U_{ii'} \rightarrow U_{i'i}$ , déterminer si ces données constituent un atlas pour un schéma  $X$  obtenu par recollement des  $X_i$  (c'est-à-dire que les  $\varphi_{ii'}$  sont des isomorphismes et vérifient la condition de compatibilité que  $\varphi_{i_2 i_3} \circ \varphi_{i_1 i_2}$  et  $\varphi_{i_1 i_2}$  coïncident là où tous deux sont définis). Donnés un deuxième schéma  $Y$  représenté par un tel atlas  $Y_1, \dots, Y_q$ , et des morphismes  $\chi_{ij}: X_i \rightarrow Y_j$ , décider si ces morphismes définissent un morphisme  $X \rightarrow Y$ . Donnés des morphismes  $X \rightarrow Y$  et  $Y \rightarrow Z$  ainsi représentés, calculer leur composée.
- Donnés un schéma représenté par un atlas comme au point précédent, décider s'il est réduit ou calculer son réduit, décider s'il est irréductible ou en en calculer les composantes irréductibles, décider s'il est connexe ou en calculer les composantes connexes, décider s'il est lisse ou calculer son lieu singulier, calculer sa dimension.
- Donnés deux morphismes de schémas  $X \rightarrow Z$  et  $Y \rightarrow Z$  représentés comme précédemment, calculer  $X \times_Z Y$  ainsi que ses projections vers  $X$  et  $Y$  (on se ramène au cas affine, où le calcul est aisé).
- Décider si un morphisme de schémas est surjectif (puisque  $k$  est algébriquement clos, ceci se décide en vérifiant la surjectivité sur les  $k$ -points).
- Décider si un schéma est séparé (en testant si sa diagonale est fermée).
- Décider si un schéma est normal ou calculer sa normalisation (cf. par exemple [Stolzenberg, 1968] ou [Greuel & Pfister, 2008, algorithme 3.4.5 et exercice 3.4.2]).
- Décider si un schéma est propre (si  $X$  est propre, d'après le lemme de Chow ([Grothendieck, 1967, II.5.6.1]), il existe  $X' \rightarrow X$  projectif surjectif avec  $X'$  projectif, et réciproquement l'existence d'un tel  $X' \rightarrow X$  assure que  $X$  est propre : en énumérant et testant toutes les données de ce type, on obtient un algorithme qui termine et répond positivement si  $X$  est propre ; si  $X$  n'est pas propre, il existe une courbe fermée dans  $X$  qui n'est pas propre, donc une courbe fermée irréductible dans  $X$  qui n'est pas propre, donc une fonction régulière non constante sur cette courbe, et réciproquement l'existence d'une telle courbe et d'une telle fonction assure que  $X$  n'est pas propre : en énumérant et testant toutes les données de ce type, on obtient un algorithme qui termine et répond négativement si  $X$  n'est pas propre<sup>i</sup> ; en lançant en parallèle ces deux algorithmes, on obtient un algorithme qui teste si  $X$  est propre).
- Décider si un morphisme de schémas est propre (de même que pour un schéma), s'il est fini (c'est équivalent à propre et quasi-fini), s'il est lisse (par un critère différentiel), s'il est étale.

**2.7.1. Remarque.** Grâce aux résultats de la section 2.5, si  $P$  est une propriété des schémas ou des morphismes de schémas qui est testable (c'est-à-dire que le fait qu'un schéma ou morphisme la vérifie est calculable au sens précédent) et qu'il existe effectivement un schéma ou morphisme la vérifiant, alors on peut calculer un tel schéma : il suffit en effet de tester pour  $N$  parcourant les entiers naturels, une propriété telle que « il existe un schéma décrit par un atlas d'au plus  $N$  cartes, chacune étant définie par au plus  $N$  équations en au plus  $N$  variables, qui vérifie la propriété  $P$  », le « il existe » étant décidable comme on l'a vu ; pour un certain  $N$ , par hypothèse, on trouvera bien un schéma vérifiant cette condition.

### 3. COURBES ET POLYCOUBRES ÉLÉMENTAIRES

**3.1. Définition** ([SGA 4 XI.3.1]). On appelle **courbe élémentaire** sur  $S$  un morphisme de schémas  $f: X \rightarrow S$  qui peut être plongé dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{j} & \overline{X} & \xhookrightarrow{i} & D \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i)  $j$  est une immersion ouverte dense dans chaque fibre, et  $X = \overline{X} - D$  ;

i. Variante pour ce sens : utiliser directement la définition de la propriété : si  $X$  n'est pas propre, il n'est pas universellement fermé.

- (ii)  $\bar{f}$  est une courbe (relative) projective lisse, à fibres géométriquement connexes ;
- (iii)  $g$  est un revêtement étale, et chaque fibre de  $g$  est non vide.

**3.2. Définition** ([SGA 4 XI.3.2]). On appelle **polycourbe élémentaire** sur  $S$  un morphisme de schémas  $X \rightarrow S$  admettant une factorisation en courbes élémentaires.

(Lorsque cela ne semble pas prêter à confusion, on s'autorise à confondre  $X$  avec le morphisme  $X \rightarrow S$ .)

**3.3. Remarque.** Notre terminologie, inspirée des courbes et polycourbes *hyperboliques* de [Mochizuki, 1999], nous semble plus explicite que les « fibrations élémentaires » et « bons voisinages » de SGA 4.

**3.4.** Soient  $X$  un schéma algébrique sur un corps algébriquement clos  $k$  et  $x$  un point fermé en lequel  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  est lisse. D'après [SGA 4 IX.3.3], il existe un voisinage ouvert zariski  $U$  de  $x$  qui est une polycourbe élémentaire (sur  $k$ ). Si  $k = \mathbb{C}$ , l'espace topologique  $U(\mathbb{C})$  est un  $K(\pi, 1)$  ; toute classe de cohomologie est tuée par un revêtement fini étale  $U' \rightarrow U$  (*op. cit.*, 4.6). Lorsque  $k$  est à nouveau un corps algébriquement clos arbitraire, on a le raffinement suivant ([Friedlander, 1982, théorème 11.7]) : il existe un voisinage *étale* de  $x$  qui est un «  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$  », où  $\pi$  est un pro- $\ell$ -groupe extension itérée de pro- $\ell$ -groupes libres. Pour la commodité du lecteur, nous présentons dans la section suivante la variante étale, pro- $\ell$ , de la notion de  $K(\pi, 1)$  et une démonstration, due à Ofer Gabber, du résultat de E. Friedlander.

#### 4. $K(\pi, 1)$ PRO- $\ell$

##### 4.1. Champs $\ell$ -monodromiques.

**4.1.1.** Soit  $\mathcal{C}$  un champ en groupoïdes sur un schéma localement noëthérien  $S$ , muni de la topologie étale ([Giraud, 1971, II.1.2.1.3]). Rappelons que l'on note  $\pi_0(\mathcal{C})$  le faisceau associé au préfaisceau

$$U/S \mapsto \{\text{classes d'isomorphismes d'objets de } \mathcal{C}(U)\}$$

— c'est aussi le faisceau des *sous-gerbes maximales* (*op. cit.*, III.2.1.3) de  $\mathcal{C}$  — et, pour chaque section locale  $c_U \in \text{Ob } \mathcal{C}(U)$ , où  $U/S$  est un ouvert étale,  $\pi_1(\mathcal{C}, c_U)$  le faisceau en groupes  $\text{Aut}(c_U)$  sur  $U$ . Le champ  $\mathcal{C}$  est dit **constructible** si le faisceau  $\pi_0(\mathcal{C})$  et les divers  $\pi_1(\mathcal{C}, c)$  sont constructibles. Dans [SGA 1 XIII. §0], un tel champ est dit 1-constructible. (Comparer avec [Giraud, 1971, VII.2.2.1] et [Orgogozo, 2003, §2].)

**4.1.2.** Un **lien** sur  $S$  est une section cartésienne (sur  $S$ ) du champ associé au préchamp des faisceaux de groupes à *automorphisme intérieur près* (*op. cit.*, IV.1.1) ; un tel objet peut être représenté par un triplet constitué d'un recouvrement étale  $S'$  de  $S$ , d'un faisceau en groupes  $G'$  sur  $S'$  et d'un isomorphisme extérieur  $\varphi : \text{Isom ex}(p_1^* G', p_2^* G')$ , où  $p_1, p_2 : S' \times_S S' \rightrightarrows S'$  sont les deux projections, satisfaisant la condition de cocycle usuelle ([Deligne et al., 1982, II, appendice]).

**4.1.3.** À tout champ localement connexe-non vide (**gerbe**)  $\mathcal{G}$  sur  $S$ , est associé un lien  $\mathcal{L}$  ; si  $c_{S'} \in \text{Ob } \mathcal{G}(S')$  pour  $S'$  couvrant  $S$ , on peut prendre  $G' = \pi_1(\mathcal{G}, c_{S'})$  dans la description précédente : le lien « est » le faisceau des groupes d'automorphismes de sections locales, à conjugaison près. On dit que  $\mathcal{G}$  est **lié** par le lien  $\mathcal{L}$ .

Si  $\mathcal{G}$  est le champ BG des *torseurs* sous un  $S$ -faisceau en groupes  $G$ , son lien est celui naturellement associé à  $G$ , représenté par le triplet ( $S' = S, G' = G, \varphi = \text{Id}$ ). Le faisceau des automorphismes de ce lien est le faisceau des automorphismes *extérieurs* de  $G$  et l'ensemble des classes d'isomorphisme de liens *localement* représentés par le  $S$ -schéma en groupes  $G$  est naturellement isomorphe à  $H^1(S, \text{Aut ex}(G))$ .

**4.1.4.** Soit  $\mathcal{L}$  un lien sur  $S$ . L'ensemble  $H^2(S, \mathcal{L})$  des classes d'équivalences de gerbes liées par  $\mathcal{L}$  est naturellement muni d'une action libre et transitive du groupe de cohomologie  $H^2(S, Z(\mathcal{L}))$ , où  $Z(\mathcal{L})$  désigne le **centre** du lien  $\mathcal{L}$ . (Voir [Deligne et al., 1982, loc. cit.] et [Giraud, 1971, IV, 1.5.3, 3.1.1 et 3.3.3].)

**4.1.5. Définition.** Soit  $\ell$  un nombre premier. Un objet sur  $S$  du type suivant est dit  **$\ell$ -monodromique** s'il satisfait l'une des conditions suivantes.

- un faisceau d'ensembles  $F$  : s'il est localement constant, constructible, et si pour tout point géométrique  $s$  de  $S$ , le groupe de monodromie, image de  $\pi_1(S, s)$  dans  $\text{Aut}(F_s)$ , est un  $\ell$ -groupe ;
- un faisceau de groupes  $G$  : s'il est  $\ell$ -monodromique en tant que faisceau d'ensembles et si ses fibres sont des  $\ell$ -groupes (finis) ;
- un lien  $L$  : s'il est *localement* représenté par un  $\ell$ -groupe fini (constant)  $G$  et si le  $\text{Aut ex}(G)$ -torseur  $\text{Isom}_{\text{liens}}(L, \underline{G})$  est  $\ell$ -monodromique, où  $\underline{G}$  désigne le (lien du) faisceau en groupes constant de valeur  $G$  ;
- un champ  $\mathcal{C}$  : si le faisceau d'ensembles  $\pi_0(\mathcal{C})$  est  $\ell$ -monodromique et si, sur le revêtement correspondant de  $S$ , les sous-gerbes maximales sont à liens  $\ell$ -monodromiques.

**4.1.6. Mise en garde.** Un champ  $\ell$ -monodromique ne provient pas nécessairement par image inverse du topos  $S_{\text{ét}}$  considéré en 4.3.3 ; cela reflète le fait qu'une classe dans  $H^2(S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  n'est pas nécessairement tuée par un revêtement galoisien d'ordre une puissance de  $\ell$  (cf. 4.1.4). C'est cependant vrai pour les faisceaux, c'est-à-dire pour les champs en catégories discrètes.

**4.1.7. Exemple.** Si  $G$  est un faisceau en groupes  $\ell$ -monodromique, la gerbe des  $G$ -torseurs est  $\ell$ -monodromique.

**4.1.8. Remarque.** Les faisceaux  $\ell$ -monodromiques sont utilisés en [Orgogozo, 2003, 4.6], où l'on démontre la locale constance générique du type d'homotopie étale  $\ell$ -adique des fibres d'un morphisme de type fini.

##### 4.2. Stabilité par image directe relativement à une courbe élémentaire.

**4.2.1.** Soit  $\ell$  un nombre premier. Une courbe élémentaire  $f$  est dite  $\ell$ -élémentaire si le faisceau  $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  est  $\ell$ -monodromique. Une polycourbe est dite  $\ell$ -élémentaire si elle admet une factorisation en courbes qui sont  $\ell$ -élémentaires.

**4.2.2. Remarque.** Lorsque  $\ell$  est inversible sur les schémas considérés, ce qui est systématiquement le cas dans cet article, le faisceau  $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  est automatiquement localement constant constructible (de formation commutant aux changements de base); l'hypothèse précédente porte donc sur sa *monodromie*.

La proposition suivante, dont l'énoncé nous a été communiqué par Ofer Gabber permet d'établir une nouvelle démonstration du [Friedlander, 1982, théorème 11.7] énoncé en 3.4.

**4.2.3. Proposition.** Soient  $S$  un schéma localement noëthérien sur lequel un nombre premier  $\ell$  est inversible et  $f : X \rightarrow S$  une courbe  $\ell$ -élémentaire. Alors, pour tout champ  $\ell$ -monodromique  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{U}$ , le champ image directe  $f_* \mathcal{C}$  est également  $\ell$ -monodromique. De plus, la formation de cette image directe commute aux changements de base  $S' \rightarrow S$ .

L'énoncé sur la commutation aux changements de base est bien connu (cf. [SGA 1 XIII]) et n'est mis que pour mémoire.

*Esquisse de démonstration.* Nous ne démontrons ici que deux cas particuliers. La démonstration du cas général, qui repose sur des généralités sur les champs  $\ell$ -monodromiques, sera exposée dans une version ultérieure de cet article. Commençons par montrer que l'image directe d'un faisceau  $\ell$ -monodromique est  $\ell$ -monodromique. On se ramène, par passage à la limite, à démontrer le fait suivant : si  $S$  n'admet pas de revêtement connexe d'ordre  $\ell$  (c'est-à-dire :  $S_{\text{ét}}$  est local) et  $s$  est un point géométrique de  $S$ , le morphisme  $\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X \times_S S_{(s)}) \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(X)$  est *surjectif*. Comme il s'agit de pro- $\ell$  groupes, cela est équivalent à montrer que la flèche  $H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X \times_S S_{(s)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  est injective (cf. [Serre, 1994, I. prop. 23]). Or, on a la suite exacte (Leray)

$$0 \rightarrow H^1(S, f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(S, R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}),$$

où :  $f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  (par locale acyclicité),  $H^1(S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$  (par hypothèse sur  $S$ ), et  $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  est constant sur  $S$  (par hypothèse sur  $f$ ) de sorte que  $H^0(S, R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = H^1(X \times_S S_{(s)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ . CQFD.

Soit  $G$  un  $\ell$ -groupe fini non trivial. Montrons que  $R^1 f_* G$  est  $\ell$ -monodromique par récurrence sur l'ordre de  $G$ . Considérons pour cela un sous-groupe *central*  $A \leq G$  d'ordre  $\ell$  et posons  $G' = G/A$ . Fixons un point géométrique  $s$  de  $S$ ; on veut montrer que l'action de  $\pi = \pi_1(S, s)$  sur  $H^1(X_s, G)$  se factorise à travers  $\pi_1^{\text{pro-}\ell}(S, s)$ . La suite exacte  $1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 1$  induit une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(X_s, A) \rightarrow H^1(X_s, G) \rightarrow H^1(X_s, G').$$

Comme expliqué dans [Giraud, 1971, III.3.4.4] ou [Serre, 1994, I.5.7], le groupe abélien  $H^1(X_s, A)$  agit sur  $H^1(X_s, G)$  et l'application  $H^1(X_s, G) \rightarrow H^1(X_s, G')$  induit une injection  $H^1(X_s, A) \setminus H^1(X_s, G) \hookrightarrow H^1(X_s, G')$ . Comme cette injection est  $\pi$ -équivariante, on peut par hypothèse supposer l'action de  $\pi$  triviale sur  $H^1(X_s, A)$  et sur le quotient  $H^1(X_s, A) \setminus H^1(X_s, G)$ . La conclusion est alors formelle : le groupe  $\pi$  agit sur un ensemble  $E$ , lequel est muni d'une action fidèle,  $\pi$ -équivariante, d'un  $\ell$ -groupe  $C$ . Si l'action de  $\pi$  sur  $C \setminus E$  est triviale, son action sur chaque élément  $e \in E$  se factorise à travers un morphisme de groupes  $\pi \rightarrow C$ . On utilise alors le fait que  $C$  est ici un  $\ell$ -groupe.  $\square$

### 4.3. Schémas $K(\pi, 1)$ .

**4.3.1.** Soit  $X$  un schéma. Rappelons que l'on note  $X_{\text{ét}}$  le topos étale et  $X_{\text{fét}}$  le topos *fini étale*. Notons  $\rho : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{fét}}$  le morphisme évident. Si  $X$  est noëthérien connexe, le choix d'un point géométrique  $x$  de  $X$  identifie naturellement le topos  $X_{\text{fét}}$  au topos  $B\pi_1(X, x)$  des  $\pi_1(X, x)$ -ensembles continus. En particulier, la cohomologie de  $X_{\text{fét}}$  n'est autre que la cohomologie (« galoisienne ») du groupe profini  $\pi_1(X, x)$ .

**4.3.2.** Le schéma  $X$  est un  $K(\pi, 1)$  (cf. p. ex. [Abbes & Gros, 2011, 9.20]) s'il satisfait la condition d'acyclicité suivante : pour tout entier  $n \geq 1$  inversible sur  $X$  et tout faisceau  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur  $X_{\text{fét}}$ , le morphisme d'adjonction  $\mathcal{L} \rightarrow R\rho_* \rho^* \mathcal{L}$  est un isomorphisme.

**4.3.3.** Soit  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$  et considérons la sous-catégorie pleine des  $X$ -schémas finis étales dont la monodromie est, sur chaque composante connexe, un  $\ell$ -groupe. Munie de la topologie étale, cette catégorie est un site, dont on note  $X_{\ell\text{ét}}$  le topos associé, naturellement équipé d'un morphisme  $\rho_\ell : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\ell\text{ét}}$ . Par construction, la cohomologie de  $X_{\ell\text{ét}}$  est, dans le cas où  $X$  est connexe, la cohomologie du groupe fondamental pro- $\ell$  de  $X$  (pointé en un point géométrique).

**4.3.4.** Un schéma noëthérien  $X$  est un  $K(\pi, 1)$  **pro- $\ell$**  si pour tout faisceau constructible de  $\ell$ -torsion  $\mathcal{L}_\ell$  sur  $X_{\ell\text{ét}}$ , le morphisme d'adjonction  $\mathcal{L}_\ell \rightarrow R\rho_{\ell,*} \rho_\ell^* \mathcal{L}_\ell$  est un isomorphisme. En conséquence, si  $x$  est un point géométrique de  $X$ , supposé connexe, et  $\mathcal{L}$  est un faisceau abélien  $\ell$ -monodromique sur  $X$ , on a  $R\Gamma(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X, x), \mathcal{L}_x) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X, \mathcal{L})$ .

**4.3.5.** Toute courbe affine lisse sur un corps algébriquement clos est un  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$ . On sait déjà que c'est un  $K(\pi, 1)$ . On constate que si  $\pi$  est un groupe profini, de pro- $\ell$  quotient maximal  $\pi^{\text{pro-}\ell}$ , et  $M$  est un  $\pi^{\text{pro-}\ell}$ -module de  $\ell$ -torsion, la flèche  $R\Gamma(\pi^{\text{pro-}\ell}, M) \rightarrow R\Gamma(\pi, M)$  est un isomorphisme. Cela résulte immédiatement de la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre et du fait que  $G$  est un groupe profini d'ordre premier au cardinal d'un  $G$ -module  $A$ , les groupes  $H^i(G, A) = 0$  sont nuls pour  $i > 0$ .

**4.3.6. Proposition.** Soient  $\ell$  un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos  $k$  et  $X$  une polycourbe  $\ell$ -élémentaire sur  $\text{Spec}(k)$ . Alors, le schéma  $X$  est un  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$  et le pro- $\ell$  complété de son groupe fondamental est extension de pro- $\ell$  groupes libres non abéliens.



*Esquisse de démonstration.* Soit  $f : X \rightarrow Y$  une polycourbe  $\ell$ -élémentaire où  $Y$  est une courbe affine connexe lisse sur corps algébriquement clos (de caractéristique  $\neq \ell$ ). On note  $\bar{\eta}$  un point générique géométrique de  $Y$  et on souhaite montrer que la suite de pro- $\ell$  groupes

$$(†) \quad 1 \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(X_{\bar{\eta}}) \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(X) \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(Y) \rightarrow 1$$

est *exacte*. (On omet ici la notation de points bases.) Soit  $G$  un  $\ell$ -groupe fini. Rappelons (cf. par exemple [SGA 4 XIII. §1]) que l'on a une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \rightarrow H^1(Y, f_*G) \rightarrow H^1(X, G) \rightarrow H^0(Y, R^1f_*G),$$

analogue non abélien de la suite exacte de bas degré usuelle (Leray). Ici, on a l'égalité  $f_*G = G$  et le faisceau  $R^1f_*G$  est localement constant de fibre en  $\bar{\eta}$  isomorphe à  $H^1(X_{\bar{\eta}}, G)$  de sorte que le noyau de la flèche (d'ensembles pointés)  $H^1(X, G) \rightarrow H^1(X_{\bar{\eta}}, G)$  est l'image de  $H^1(Y, G) : (†)$  est exacte au centre. L'exactitude à droite est bien connue et est également vraie sans passer aux pro- $\ell$  complétés. (Voir [SGA 1 XIII. 4.1 et V. §6].)

Notons  $\mathcal{C}$  le champ sur  $Y$  image directe par  $f$  du champ des  $G$ -torseurs sur  $X$ . Rappelons ([Giraud, 1971, V.3.1.6]) l'interprétation champêtre de la suite exacte précédente. Le terme de droite s'identifie à l'ensemble des sous-gerbes maximales de  $\mathcal{C}$  ; à une classe  $c \in H^0(Y, R^1f_*G)$  est associée la gerbe  $D(c)$  dont la fibre en  $V \rightarrow Y$  est la catégorie des  $G$ -torseurs sur  $U = X \times_Y V$  dont la classe dans  $H^1(U, G)$  s'envoie sur la restriction  $c|_V \in H^0(V, R^1f_*G)$ . La gerbe  $D(c)$  est triviale si et seulement si  $c$  est l'image d'une classe  $[T] \in H^1(X, G)$  et, dans ce cas,  $D(c)$  est équivalente au champ des  $f_*\text{Aut}(T)$ -torseurs sur  $Y$ . D'après 4.2.3, il existe un  $\ell$ -revêtement étale de  $Y' \rightarrow Y$  tel que le faisceau  $\pi_0(\mathcal{C}')$  des sous-gerbes maximales de  $\mathcal{C}' = (Y' \rightarrow Y)^*\mathcal{C}$  soit fini constant et que chacune des sous-gerbes maximales soient *localement* liées par le lien d'un  $\ell$ -groupe constant. (On utilise la commutation au changement de bases de la formation de l'image directe  $f_*BG$ .) On peut montrer que sur un espace  $T$  tel que  $H^2(T, A) = 0$  pour tout groupe abélien fini  $A$ , toute gerbe sur  $T$  qui est *localement* BG un  $\ell$ -groupe fini  $G$  a une section (c'est-à-dire est triviale). On applique ceci aux sous-gerbes maximales de  $\mathcal{C}'$  sur la courbe affine  $Y'$ . Il en résulte que le foncteur de restriction  $\mathcal{C}'(Y') = \mathcal{C}(Y') \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\eta})$  est essentiellement surjectif : tout  $G$ -torseur sur  $X_{\bar{\eta}}$  s'obtient par restriction à partir d'un  $G$ -torseur sur  $X' = X \times_Y Y'$ . Ceci suffit pour conclure (cf. [SGA 1 V. 6.8 et XIII. 4.3]). On utilise le fait que la clôture galoisienne sur  $X$  du tosseur est un revêtement d'ordre une puissance de  $\ell$  : si  $H'' \triangleleft H' \triangleleft H$  sont des groupes finis avec  $[H : H']$  et  $[H' : H'']$  des puissances d'un nombre premier  $\ell$ , le sous-groupe  $\bigcap_{h \in H/H''} hH''h^{-1}$  est d'indice une puissance de  $\ell$  dans  $H$ . Pour montrer que  $X$  est un  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$ , commençons par constater que si  $\mathcal{F}$  est un faisceau abélien  $\ell$ -monodromique, et  $f$  une polycourbe  $\ell$ -élémentaire, les faisceaux  $R^1f_*\mathcal{F}$  sont  $\ell$ -monodromiques. La stabilité par extension des faisceaux abéliens  $\ell$ -monodromiques nous permet en effet de nous ramener, par récurrence, au cas où  $f$  est une courbe  $\ell$ -élémentaire, auquel cas cela résulte de la proposition 4.2.3. La conclusion résulte alors de la suite exacte d'homotopie précédente, de l'égalité  $R\Gamma(X, \mathcal{F}) = R\Gamma(Y, Rf_*\mathcal{F})$ , de l'isomorphisme  $R\Gamma(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(Y, \bar{\eta}), (Rf_*\mathcal{F})_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(Y, Rf_*\mathcal{F})$  (cf. 4.3.5) et enfin de l'isomorphisme  $(Rf_*\mathcal{F})_{\bar{\eta}} = R\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} R\Gamma(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X_{\bar{\eta}}), \mathcal{F})$ , obtenu par récurrence sur la dimension relative.  $\square$

**4.3.7.** Avant d'énoncer le résultat d'abondance des  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$  ci-dessous, rappelons que P. Deligne a défini dans [Deligne, 1974, §5.3.5] la *topologie de la descente cohomologique universelle*. Un morphisme étale (resp. propre) surjectif est de descente cohomologique universelle.

**4.3.8. Proposition.** *Soit  $\ell$  un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos  $k$ . Tout  $k$ -schéma algébrique est, localement pour la topologie de la descente cohomologique universelle, un  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$ .*

*Démonstration.* Soit  $X$  un tel schéma. Localement (par un morphisme fini surjectif), c'est le coproduit d'un nombre fini de  $k$ -schémas algébriques *intègres*. On peut donc supposer  $X$  intègre. D'après [de Jong, 1996, 4.1], un tel schéma est localement (par une altération), un  $k$ -schéma *lisse*. (Altération : morphisme propre et surjectif induisant un morphisme fini au-dessus d'un ouvert partout dense et envoyant tout point maximal sur un point maximal.) Comme rappelé en 3.4, on peut donc supposer le  $k$ -schéma lisse  $X$  est une polycourbe élémentaire. Écrivons  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  comme la composée  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Spec}(k)$ , où  $f$  est une courbe élémentaire. (Voir figure ci-dessous.) Il existe un revêtement étale  $Y' \rightarrow Y$  trivialisant  $R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  c'est-à-dire (par propriété cohomologique) tel que le faisceau  $R^1f'_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  soit trivial donc, en particulier,  $\ell$ -monodromique. Un tel revêtement est calculable. En effet, passant au point générique du schéma normal  $Y$ , on se ramène à 5.9. (Le cas d'une courbe, plus élémentaire, peut se traiter directement ; cf. 5.4.) Le morphisme  $f'$  est donc une courbe  $\ell$ -élémentaire. Par récurrence sur la dimension du schéma considéré, on peut supposer qu'il existe, localement au voisinage de chaque point, un morphisme  $Y'' \rightarrow Y'$  tel que le morphisme  $g''$  soit une polycourbe  $\ell$ -élémentaire. Le schéma  $X''$ , obtenu par changement de base, convient.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & X'' \\ f \downarrow & & f' \downarrow & & f'' \downarrow \\ Y & \longleftarrow & Y' & \longleftarrow & Y'' \\ g \downarrow & \swarrow g' & & \searrow g'' & \\ \text{Spec}(k) & & & & \end{array}$$

$\square$

Nous utiliserons la proposition précédente sous la forme suivante (cf. [Deligne, 1974, 5.3.3.1 et §6.2]).

**4.3.9. Corollaire.** Soient  $\ell$  un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos  $k$  et  $X$  un  $k$ -schéma algébrique. Alors, il existe un  $X$ -schéma simplicial  $X_\bullet$  tel que chaque  $X_i$  soit un  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$  et tel que la flèche d'adjonction  $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow R\Gamma(X_\bullet, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  soit un isomorphisme. De plus, un morphisme  $Y \rightarrow X$  de  $k$ -schémas algébriques peut être coiffé par un morphisme simplicial  $Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  du type précédent.

## 5. CALCULABILITÉ DU $H^1$

**5.1.** Soient  $X$  un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos  $k$  et  $G$  un groupe fini constant d'ordre une puissance d'un nombre premier  $\ell$  inversible sur  $X$ . On se propose de vérifier que l'on peut calculer  $H^1(X, G)$  lorsque  $X$  est normal.

**5.2.** Il suffit de trouver une extension finie galoisienne du corps des fractions  $K$  de  $X$  qui domine tous ces  $G$ -torseurs, ou encore une extension les trivialisant tous. En effet, si  $L/K$  est une telle extension, de groupe de Galois  $\pi$ , l'ensemble  $H^1(X, G)$  est naturellement un sous-ensemble de l'ensemble fini  $H^1(\pi, G) = \text{Hom}(\pi, G)/G$  de  $G$ -torseurs sur  $K$ . Concrètement, un  $G$ -torseur sur  $X$  est obtenu par normalisation de  $X$  dans une extension intermédiaire de  $L/K$ ; parmi ces  $X$ -schémas, en nombre fini, il faut vérifier quels sont ceux qui sont étales et galoisiens de groupe  $G$  sur  $X$ .

**5.3. Réduction au cas abélien.** Notons  $Z$  le centre de  $G$ . La suite exacte

$$1 \rightarrow Z \rightarrow G \rightarrow G/Z \rightarrow 1$$

induit ([Giraud, 1971, V.2.3]) une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(X, Z) \rightarrow H^1(X, G) \rightarrow H^1(X, G/Z).$$

Supposons, par récurrence, que l'on sache trouver une extension  $L$  du corps des fonctions de  $X$  trivialisant les  $G/Z$ -torseurs. Soit  $X_L$  le normalisé de  $X$  dans  $L$ . L'image inverse sur  $X_L$  de chaque  $G$ -torseur sur  $X$  provient d'un  $Z$ -torseur sur  $X_L$ . (On utilise le fait que la restriction au point générique induit une injection sur les  $H^1$  car les schémas considérés sont normaux.) Ceci nous ramène au cas particulier où  $G$  est un  $\ell$ -groupe abélien et, finalement, au cas où  $G = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ .

**5.4. Cas d'une courbe.** Si  $X$  est une courbe (lisse) sur le corps algébriquement clos  $k$ , le cardinal de  $H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  est connu. On peut donc effectivement produire tous les  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseurs sur  $X$  en un temps fini.

**5.5. Remarque.** On pourrait se ramener au cas d'une courbe projective en procédant de la façon suivante. Si  $\bar{X}$  est la complétion projective de  $X$  et  $\bar{X} - X = \{c_1, \dots, c_r\}$  sont les points à l'infini, il existe (Riemann-Roch) une fonction  $f \in K^\times$  s'annulant exactement en ces points. Notons  $L = K(\sqrt[r]{f})$ . D'après le lemme d'Abhyankar, l'image inverse sur  $X_L$  d'un  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur sur  $X$  s'étend à  $\bar{X}_L$ . Cet argument est également valable pour tout  $k$ -schéma de type fini normal  $X$ , quitte à altérer  $X$  pour en faire le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans un  $k$ -schéma projectif lisse (de Jong).

**5.6. Fibration en courbes.** Supposons dorénavant le schéma  $X$  de dimension  $d \geq 2$ . On peut le supposer intègre. Quitte à modifier  $X$ , c'est-à-dire le remplacer par un  $X$ -schéma propre et birationnel, il existe un  $k$ -schéma de type fini intègre  $S$  de dimension  $d-1$  et un morphisme  $X \rightarrow S$  faisant de  $X$  une courbe relative sur  $S$  à fibre générique lisse. (Cf. p. ex. [de Jong, 1996, 4.11-12].) Il résulte de ce qui précède — appliqué à la courbe  $X_{\bar{\eta}}$  où  $\bar{\eta}$  est un point générique géométrique de  $S$  — qu'il existe un  $S$ -schéma étale  $S'$  intègre de point générique  $\eta'$  et un revêtement  $Y' \rightarrow X_{S'}$  tel que si  $T$  est un  $G$ -torseur sur  $X$  et  $T'$  le torseur obtenu par le changement de base  $Y' \rightarrow X$ , la fibre générique géométrique  $T'_{\bar{\eta}'}$  est le  $G$ -torseur trivial. Quitte à changer les notations, on peut supposer  $S = S'$  et  $X = Y'$ .

**5.7.** Quitte à remplacer  $S$  par un ouvert étale, on peut supposer que le morphisme  $X \rightarrow S$  est une courbe élémentaire. Vérifions que, sous cette hypothèse, tout  $G$ -torseur  $T$  sur  $X$  à fibre générique géométrique triviale provient de  $S$ . Supposons, comme il a été fait ci-dessus, que  $G$  est le groupe abélien  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ , et notons  $f$  le morphisme  $X \rightarrow S$ . Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(S, f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(S, R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

Par acyclicité et propriété cohomologique, le morphisme d'adjonction  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \rightarrow f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  est un isomorphisme, le faisceau  $R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  est lisse sur  $S$  et la fibre générique géométrique de  $R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ . Il en résulte que la flèche  $H^0(S, R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  est une injection et, par conséquent, que tout  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur sur  $X$  trivialisé par  $X_{\bar{\eta}}$  provient de  $S$ . CQFD. (Voir aussi 4.2.3 et 4.3.6.)

**5.8. Remarque.** Cette méthode de fibration en courbes nous a été suggérée par Ofer Gabber.

**5.9. Remarque.** Il résulte de la démonstration que si l'on ne suppose plus  $k$  algébriquement clos, on peut non seulement calculer  $H^1(X_{\bar{k}}, G)$  mais aussi l'action du groupe de Galois absolu de  $k$ . En d'autres termes, on peut trouver une extension finie galoisienne  $k'/k$  telle que l'action du groupe de Galois absolu se factorise à travers son quotient  $\text{Gal}(k'/k)$ , agissant de façon explicite sur  $H^1(X_{\bar{k}}, G)$ .

6. SÉRIE  $\ell$ -CENTRALE DESCENDANTE ET GROUPE FONDAMENTAL

**6.1.** Soient  $\ell$  un nombre premier et  $G$  un pro- $\ell$  groupe. Rappelons ([Dixon et al., 1999, 1.15] ou [Neukirch et al., 2000, définition 3.8.1]) que la **série  $\ell$ -centrale descendante** de  $G$  est la filtration définie de la façon suivante :  $G^{[1]} = G$ , et  $G^{[i+1]}$  est l'adhérence du sous-groupe  $G^{[i]\ell}(G^{[i]}, G)$ . (On notera aussi parfois  $F^i G$  pour  $G^{[i]}$ .) Ces sous-groupes sont caractéristiques dans  $G$  ; on note  $G^{(i)}$  le quotient  $G/G^{[i]}$ . En particulier,  $G^{[2]}$  est le sous-groupe de Frattini  $\Phi(G)$  et  $G^{(2)}$  est dual de  $\text{Hom}_{\text{cont}}(G, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ .

**6.2. Remarques.** On vérifie sans peine que  $G^{[n+1]}$  est le plus petit sous-groupe fermé normal de  $G$  contenu dans  $G^{[n]}$  tel que  $G^{[n]}/G^{[n+1]}$  soit  $\ell$ -élémentaire abélien et contenu dans le centre de  $G/G^{[n+1]}$ . Si  $G$  est topologiquement de type fini, les sous-groupes  $G^{[i]\ell}(G^{[i]}, G)$  sont fermés (*op. cit.*, 1.20).

**6.3.** Soient  $X$  un schéma connexe, séparé de type fini sur un corps algébriquement clos  $k$ ,  $x$  un point géométrique,  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $k$  et  $\pi$  le groupe fondamental pro- $\ell$  de  $(X, x)$ . Pour chaque entier  $n \geq 1$ , notons  $X^{[n]}$  le revêtement étale de  $X$  correspondant au sous-groupe d'indice fini  $\pi^{[n]}$  de  $\pi$ . Cette définition s'étend au cas d'un schéma non nécessairement connexe : si  $X = \coprod_i X_i$ , on pose  $X^{[n]} := \coprod_i X_i^{[n]}$ . On note  $X_{\text{ét}}^{(n)}$  le topos des faisceaux sur  $X_{\text{ét}}$  trivialisés par le revêtement étale  $X^{[n]} \rightarrow X$ . Dans le cas connexe, le morphisme naturel  $X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}^{(n)}$  s'identifie au morphisme  $B\pi \rightarrow B\pi^{(n)}$ .

**6.4.** On suppose dorénavant que le schéma  $X$  est *normal* et on se propose de montrer que l'on peut effectivement calculer les quotients finis  $\pi^{(n)}$  de  $\pi$  par la série  $\ell$ -centrale descendante.

**6.5.**  $n = 2$ . Comme signalé ci-dessus, le groupe  $\pi^{(2)}$  est isomorphe au dual du  $\mathbb{F}_\ell$ -espace vectoriel de dimension finie  $H^1(X, \mathbb{F}_\ell)$ . D'après les résultats de §5, on peut calculer le rang de cet espace vectoriel.

**6.6. Récurrence sur  $n$ .** On suppose que l'on sait calculer le groupe  $\pi^{(n)}$ . Il en résulte que l'on peut construire le revêtement  $X^{[n]}$  de  $X$  correspondant à ce quotient de  $\pi$ . Considérons maintenant  $X^{[n][2]}$ , revêtement galoisien de  $X^{[n]}$  de groupe  $\pi_1(X^{[n]})^{(2)}$ . C'est également un revêtement de  $X$  ; *galoisien* car  $\pi^{[n]\ell}(\pi^{[n]}, \pi^{[n]})$  est caractéristique dans  $\pi$  donc distingué. Notons  $G$  le groupe de Galois de  $X^{[n][2]}$  sur  $X$ , que l'on peut calculer : c'est le groupe d'automorphismes d'un  $X$ -schéma explicite. Abstraitemment, il est isomorphe à  $\pi/\pi^{[n]\ell}(\pi^{[n]}, \pi^{[n]})$  ; le groupe que  $\pi^{(n+1)} = \pi/\pi^{[n+1]}$  — que l'on cherche à calculer — en est donc un quotient. Plus précisément, par fonctorialité ([Dixon et al., 1999, 1.16 (i)]),  $\pi^{(n+1)} = G^{(n+1)}$ . Ceci permet de conclure.

**6.7.** Soit  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  un morphisme de  $k$ -schémas algébriques géométriquement pointés, *normaux* connexes, dont on note respectivement  $\pi_X$  et  $\pi_Y$  les groupes fondamentaux pro- $\ell$ . Pour tout entier  $n$ , on peut calculer le morphisme  $\pi_X^{(n)} \rightarrow \pi_Y^{(n)}$  déduit de  $f$  par fonctorialité. Ce morphisme de groupes — ou, de façon équivalente ici, de  $\pi_X$ -ensembles discrets — correspond, par Galois-Grothendieck, au morphisme de schémas en pointillés dans le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} X^{[n]} & \dashrightarrow & X \times_Y Y^{[n]} & \longrightarrow & Y^{[n]} \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \pi_X^{(n)} \\ \pi_Y^{(n)} \end{array} \right\}$$

Les flèches horizontales supérieures sont calculables car  $Y^{[n]} \rightarrow Y$  et  $X^{[n]} \rightarrow X$  le sont et  $f : X \rightarrow Y$  est donné. Le morphisme de groupes  $\pi_X^{(n)} \rightarrow \pi_Y^{(n)}$  se déduit du morphisme explicite de schémas  $f^{[n]} : X^{[n]} \rightarrow Y^{[n]}$  : il s'identifie à l'application  $\pi_0(f^{[n]} \times f^{[n]}) : \pi_0(X^{[n]} \times_X X^{[n]}) \rightarrow \pi_0(Y^{[n]} \times_Y Y^{[n]})$ . (Notons que si  $X \rightarrow Y$  est *dominant*, on peut également passer aux points génériques : un élément de  $\text{Gal}(K(X^{[n]})/K(X))$  induit par restriction un élément de  $\text{Gal}(K(Y^{[n]})/K(Y))$ .)

## 7. SYSTÈMES ESSENTIELLEMENT CONSTANTS

**7.1. Définition.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne,  $N$  un entier naturel et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application vérifiant  $\varphi(n) \geq n$  pour tout  $n$ . On dit qu'un système inductif  $A_\bullet = (A_n)$  de  $\mathcal{A}$ , indicé par  $\mathbb{N}$ , est  $(N, \varphi)$ -essentielllement constant lorsque :

- (i)  $\text{Ker}(A_n \rightarrow A_{\varphi(n)}) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(A_n \rightarrow A_m)$  pour tout  $m \geq \varphi(n)$  ;
- (ii)  $\text{Im}(A_N \rightarrow A_{\varphi(n)}) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(A_n \rightarrow A_{\varphi(n)})$  pour tout  $n \geq N$ .

La première condition entraîne évidemment que  $\text{Im}(A_n \rightarrow A_{\varphi(n)}) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(A_n \rightarrow A_m)$  pour tout  $m \geq \varphi(n)$ . Il s'ensuit que la condition reste vérifiée si on remplace  $\varphi$  par une fonction qui lui est en tout point supérieure : on peut donc supposer dans cette définition que  $\varphi$  est croissante, ce qu'on fera. Remarquons par ailleurs qu'on peut aussi évidemment remplacer  $N$  par n'importe quel entier supérieur.

Pour un tel système, la composée  $A_n \rightarrow \text{Im}(A_n \rightarrow A_{\varphi(n)}) \xleftarrow{\sim} \text{Im}(A_N \rightarrow A_{\varphi(n)}) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(A_N \rightarrow A_{\varphi(N)})$  définit un morphisme  $A_n \rightarrow \text{Im}(A_N \rightarrow A_{\varphi(N)})$  pour tout  $n \geq N$ , et il est clair que ces morphismes commutent aux flèches  $A_n \rightarrow A_{n'}$  lorsque  $n \leq n'$  ; inversement, donné un système de flèches compatibles  $(A_n \rightarrow B)$  (pour  $n \geq N$ ) pour un objet  $B$  de  $\mathcal{A}$ , chaque flèche  $A_n \rightarrow B$  se factorise par  $A_{\varphi(n)}$  donc par  $\text{Im}(A_n \rightarrow A_{\varphi(n)})$  donc toutes se déduisent de la seule flèche  $\text{Im}(A_N \rightarrow A_{\varphi(N)}) \rightarrow B$  : ces considérations montrent que la limite inductive du système  $(A_n)$  est tout simplement  $\text{Im}(A_N \rightarrow A_{\varphi(N)})$ .

La proposition clef suivante nous a été communiquée par Ofer Gabber.

**7.2. Proposition.** Soit  $0 \rightarrow A'_\bullet \rightarrow A_\bullet \rightarrow A''_\bullet \rightarrow 0$  une suite exacte de systèmes inductifs. Donnés  $(N_1, \varphi_1)$  et  $(N_2, \varphi_2)$  tels que deux des trois termes sont essentielllement constants pour ces données, on peut construire  $(N_3, \varphi_3)$  tel que troisième terme le soit relativement à cette donnée.

*Démonstration.* [On raisonne sur des modules.]

Supposons d'abord que  $(A_n)$  et  $(A_n'')$  soient respectivement  $(N, \varphi)$ - et  $(N'', \varphi'')$ -essentiellement constants. La première condition est vérifiée de  $(A_n')$  pour la fonction  $\varphi$  : en effet, un élément de  $A_n'$  qui s'annule dans  $A_m'$  pour  $m \geq \varphi(n)$  s'annule en particulier dans  $A_m$  (d'après la même condition sur  $(A_n)$ ) donc s'annule dans  $A_{\varphi(n)}$  donc dans  $A_{\varphi(n)}'$ . Soit maintenant  $N' = \varphi''(N)$  (qui est supérieur ou égal à  $N$ ) : si  $x$  appartient à  $A_n'$ , son image dans  $A_{\varphi(n)}'$  vue dans  $A_{\varphi(n)}$  est l'image d'un élément  $y$  de  $A_N$  (d'après la deuxième condition sur le système  $(A_n)$ ) : l'image de ce  $y$  dans  $A_N''$  s'annule dans  $A_{\varphi(n)}''$ , c'est-à-dire appartient à  $\text{Ker}(A_N'' \rightarrow A_{\varphi(n)}'')$ , et la première condition sur  $(A_n'')$  entraîne que cette image s'annule dans  $A_N''$ , donc l'image de  $y$  dans  $A_N'$  provient d'un élément de  $A_N'$ , qui par construction a la même image dans  $A_{\varphi(n)}'$  que l'élément  $x$  qu'on s'était fixé. On a donc montré que le système  $(A_n')$  était  $(N', \varphi)$ -essentiellement constant (pour  $N' = \varphi''(N)$ ).

Supposons maintenant que  $(A_n)$  et  $(A_n')$  soient respectivement  $(N, \varphi)$ - et  $(N', \varphi')$ -essentiellement constants. Soit  $z \in A_n''$  avec  $n \geq N'$ , et soit  $m \geq n$  tel que l'image de  $z$  s'annule dans  $A_m''$  : alors, si  $y$  est un relèvement quelconque de  $z$  à  $A_n$ , l'image de  $y$  dans  $A_m''$  s'annule, donc l'image de  $y$  dans  $A_m$  provient d'un  $x \in A_m'$  ; puisque  $(A_n')$  est essentiellement constant, il existe  $x_0 \in A_n'$  tel que  $x_0$  et  $x$  aient même image dans  $A_{\varphi'(m)}'$  ; alors  $y' := y - x_0$  (vu comme élément de  $A_n$ ) a une image nulle dans  $A_{\varphi'(m)}$  : donc l'image de  $y'$  dans  $A_{\varphi(n)}$  est déjà nulle (d'après la première condition sur  $(A_n)$ ), mais ceci implique que l'image de  $z$  dans  $A_{\varphi(n)}''$  est nulle. Ceci montre la première condition pour  $(A_n'')$ , pour la fonction  $\varphi''$  égale à  $\max(\varphi, N')$ . S'agissant de la seconde condition, si  $z \in A_n''$  et si  $y$  en est un relèvement quelconque à  $A_n$ , il existe un  $\tilde{y}$  dans  $A_N$  tel que  $y$  et  $\tilde{y}$  aient la même image dans  $A_{\varphi''(n)}$ , et alors l'image  $\tilde{z}$  de  $\tilde{y}$  dans  $A_N''$  a la même image que  $z$  dans  $A_{\varphi''(n)}''$ . On a donc montré que le système  $(A_n'')$  était  $(N, \varphi'')$ -essentiellement constant (pour  $\varphi'' = \max(\varphi, N')$ ).

Enfin, supposons que  $(A_n')$  et  $(A_n'')$  soient respectivement  $(N', \varphi')$ - et  $(N'', \varphi'')$ -essentiellement constants. Soit  $y \in A_n$  qui s'annule dans  $A_m$  pour  $m \geq n$  : alors en particulier son image dans  $A_m''$  s'annule, donc elle s'annule déjà dans  $A_{\varphi''(n)}''$  (d'après la première propriété sur  $(A_n'')$ ) ; donc l'image de  $y$  dans  $A_{\varphi(n)}$  provient d'un élément  $x$  de  $A_{\varphi''(n)}'$  ; si  $m \geq \varphi''(n)$ , l'image de  $x$  dans  $A_m'$  s'annule et s'annule donc déjà (d'après la première propriété sur  $(A_n')$ ) dans  $A_{\varphi'(\varphi''(n))}'$ . Ceci montre la première condition sur  $(A_n)$  pour la fonction  $\varphi$  :  $n \mapsto \varphi'(\varphi''(n))$ . Enfin, soit  $y \in A_n$  : son image dans  $A_n'$  a la même image dans  $A_{\varphi''(n)}''$  qu'un certain élément  $\tilde{z} \in A_N''$ , donc si  $\tilde{y}$  est un relèvement quelconque de  $\tilde{z}$  à  $A_N''$ , les éléments  $y$  et  $\tilde{y}$  (de  $A_n$  et  $A_N''$  respectivement) ont même image dans  $A_{\varphi''(n)}$ , donc la différence entre ces images provient d'un élément  $x \in A_{\varphi''(n)}'$  ; ce dernier a la même image dans  $A_{\varphi(n)}' = A_{\varphi'(\varphi''(n))}'$  qu'un certain élément  $\tilde{x} \in A_N'$  : si on appelle  $N$  le maximum de  $N'$  et  $N''$  alors la somme des images de  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  dans  $A_{\varphi(n)}$  est la même que celle de  $y$ . On a donc montré que le système  $(A_n)$  était  $(N, \varphi)$ -essentiellement constant pour  $\varphi = \varphi' \circ \varphi''$  et  $N = \max(N', N'')$ .  $\square$

**7.3.** Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne, et  $(E_{r,\lambda}^{*,*})_{\lambda \in \mathbb{N}}$  un système inductif de suites spectrales ( $r \geq r_0$ ) d'objets de  $\mathcal{A}$ , supposées dans le premier quadrant, dont on note, pour chaque indice  $\lambda$ , l'aboutissement  $E_{\lambda}^*$ . (Suivant p. ex. [ÉGA 0III, §11.1], on considère que cet objet filtré de  $\mathcal{A}$  fait partie de la donnée.)

**7.4. Corollaire.** Soit  $m$  un entier. Supposons qu'il existe un couple  $(N, \varphi)$  tel que pour chaque paire  $p, q$  d'entiers satisfaisant l'inégalité  $p + q < 2(m + 1)$  le système inductif  $(E_{r_0,\lambda}^{p,q})_{\lambda}$  soit  $(N, \varphi)$ -essentiellement constant. Alors, il existe un couple  $(N_{\infty}, \varphi_{\infty})$  calculable tel que pour chaque  $0 \leq d \leq m$  le système inductif  $(E_{\lambda}^d)_{\lambda}$  soit  $(N_{\infty}, \varphi_{\infty})$ -essentiellement constant.

*Démonstration.* Pour chaque indice  $\lambda$ , le calcul de  $E_{r,\lambda}^{p,q}$  ne fait intervenir que des flèches entre sous-quotients de  $E_{r_0,\lambda}^{p',q'}$  avec  $p' + q' \leq p + q + (r - r_0)$ . Comme d'autre  $E_{\infty,\lambda}^{p,q} = E_{r,\lambda}^{p,q}$  si  $r > p + q + 1$ , il résulte de la proposition précédente (7.2) que les systèmes inductifs  $(E_{\infty,\lambda}^{p,q})_{\lambda}$  pour  $p + q < m$  sont explicitement essentiellement constants. Enfin, comme pour chaque  $0 \leq d \leq m$  l'aboutissement  $E_{\lambda}^d$  est une extension itérée de ces  $E_{\infty,\lambda}^{p,q}$  la conclusion résulte d'une nouvelle application de loc. cit.  $\square$

**7.5. Proposition.** Soient  $A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet}$  un morphisme de systèmes inductifs et  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction strictement croissante. Supposons qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_{\bullet} & \xrightarrow{\quad} & B_{\bullet} \\ \downarrow & \searrow h_{\bullet} & \downarrow \\ A_{\tau(\bullet)} & \xrightarrow{\quad} & B_{\tau(\bullet)} \end{array}$$

Alors, si  $B_{\bullet}$  est  $(N, \varphi)$ -essentiellement constant,  $A_{\bullet}$  est  $(\tau N, \tau \varphi)$ -essentiellement constant.

Au cours de la démonstration, nous ferons la convention suivante : donnés un élément  $a_n \in A_n$  et  $m \geq n$  un entier, nous notons  $a_m \in A_m$  l'image de  $a_n$  par l'application  $A_n \rightarrow A_m$ .

*Démonstration.* On commence par démontrer l'énoncé 7.1 (i) sur les noyaux. Soient  $n$  un entier et  $m \geq \tau \varphi(n)$  et montrons que tout élément  $a_n$  dans  $\text{Ker}(A_n \rightarrow A_m)$  appartient déjà à  $\text{Ker}(A_n \rightarrow A_{\tau \varphi(n)})$ . L'image  $b_n$  de  $a_n$  dans  $B_n$  appartient au noyau  $\text{Ker}(B_n \rightarrow B_m)$  donc, compte tenu de l'hypothèse sur  $B_{\bullet}$  et de l'inégalité  $m \geq \tau \varphi(n) \geq \varphi(n)$ , au noyau  $\text{Ker}(B_n \rightarrow B_{\varphi(n)})$ . Ainsi,  $a_{\tau \varphi(n)} = h_{\varphi(n)}(b_{\varphi(n)}) = 0$ .

Vérifions maintenant l'énoncé (ii) sur les images. Soient  $n \geq \tau N$  et  $a_{\tau \varphi(n)} \in A_{\tau \varphi(n)}$  l'image d'un élément  $a_n \in A_n$ . Montrons qu'il est également dans l'image de  $A_{\tau N}$ . Par hypothèse sur  $B_{\bullet}$ , l'image  $b_{\varphi(n)}$  de  $a_{\varphi(n)}$  provient d'un  $b_N \in B_N$ . Il en résulte formellement que  $h_N(b_N) \in A_{\tau N}$  s'envoie sur  $a_{\tau \varphi(n)}$ .  $\square$

## 8. APPROXIMATION D'UN PRO- $\ell$ -GROUPE PAR SES QUOTIENTS FINIS

Pour  $\pi$  un  $\ell$ -groupe, on rappelle qu'on a défini la filtration  $\ell$ -centrale descendante par  $F^1 \pi = \pi$  et  $F^{n+1} \pi = (F^n \pi)^{\ell} [\pi, F^n \pi]$  (groupe topologiquement engendré).

**8.1. Lemme.** *Il existe deux fonctions calculables  $\varphi$  et  $\psi$  telles que :*

- si  $\pi$  est un  $\ell$ -groupe fini d'ordre  $\leq n$  alors  $F^{\varphi(n)}\pi = 1$ , et
- si  $\pi$  est un  $\ell$ -groupe fini à  $d$  générateurs tel que  $F^n\pi = 1$ , alors  $\#\pi \leq \psi(d, n)$ .

*Démonstration.* Pour ce qui est de  $\varphi$  : il n'existe qu'un nombre fini de groupes d'ordre  $\leq n$  (et en particulier, de  $\ell$ -groupes d'ordre  $\leq n$ ), et il est possible de les énumérer effectivement, et comme pour chaque  $\ell$ -groupe on peut trouver un  $r$  tel que  $F^r\pi = 1$  (cf. [Neukirch et al., 2000, proposition 3.8.2]), on peut trouver un  $r$  qui convient pour tous.

Pour ce qui est de  $\psi$  : d'après [Lubotzky & Segal, 2003, théorème 3.5.1], si  $L$  est le pro- $\ell$ -groupe libre sur  $d \geq 2$  générateurs et  $N$  un sous-groupe distingué ouvert de  $L$  d'indice  $\ell^s > 1$ , si on note  $N' = N^\ell[N, L]$ , on a  $(N : N') \leq \ell^{(d-1)s+1}$ , de sorte que  $(L : N') \leq \ell^{ds+1} \leq \ell^{(d+1)s}$ ; en appliquant ceci à  $N = F^rL$  et par récurrence sur  $r$  on en déduit  $(L : F^rL) \leq \ell^{(d+1)^r}$  (on vérifie immédiatement que cette inégalité fonctionne encore pour  $d = 1$  et  $r = 1, 2$ ). Par conséquent, si  $\pi$  est un  $\ell$ -groupe fini à  $d$  générateurs tel que  $F^n\pi = 1$ , en considérant  $L \twoheadrightarrow \pi$  la surjection donnée par ces  $d$  générateurs, on a une surjection  $(L/F^nL) \twoheadrightarrow \pi$ , donc  $\#\pi \leq \ell^{(d+1)^n}$ .  $\square$

**8.2. Proposition.** *Il existe une fonction  $\tau$  calculable telle que, si  $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow 1$  est une suite exacte courte de pro- $\ell$ -groupes, où  $\pi', \pi''$  ont respectivement  $d', d''$  générateurs, on a  $F^{\tau(d', d'', n)}\pi \cap \pi' \subseteq F^n\pi' \subseteq F^n\pi \cap \pi'$  pour tout  $n$ .*

*Démonstration.* Il est évident que  $F^n\pi' \subseteq F^n\pi \cap \pi'$ . On souhaite montrer que, réciproquement,  $F^n\pi' \supseteq F^{\tau(n)}\pi \cap \pi'$  pour une certaine fonction  $\tau$  explicitement calculable (dépendant du nombre  $d', d''$  de générateurs de  $\pi', \pi''$ , mais pas d'autres données).

Expliquons pourquoi on peut supposer que  $\pi''$  est libre : il existe en tout cas un morphisme surjectif  $L \twoheadrightarrow \pi''$  où  $L$  est le pro- $\ell$ -groupe libre sur  $d''$  générateurs ; et quitte à relever à  $\pi$  les images par ce morphisme de chacun des générateurs, on peut le factoriser comme la composée d'un morphisme  $s : L \rightarrow \pi$  et de la surjection donnée  $\pi \twoheadrightarrow \pi''$ . Soit  $\hat{\pi} = \pi \times_{\pi''} L$  l'ensemble des éléments de  $\pi \times L$  dont les deux composantes ont même image dans  $\pi''$  (la première projection est donc un morphisme surjectif  $\hat{\pi} \twoheadrightarrow \pi$  qui se restreint à l'identité sur  $\pi'$ ) : ce  $\hat{\pi}$ , qui s'inscrit dans une suite exacte  $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \hat{\pi} \rightarrow L \rightarrow 1$ , se décrit aussi comme le produit semidirect  $\hat{\pi} = \pi' \rtimes_* L$  par l'action de  $L$  sur  $\pi'$  donnée par  $z * x = s(z) \times s(z)^{-1}$ . Si on a montré la conclusion voulue pour la suite exacte  $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \hat{\pi} \rightarrow L \rightarrow 1$ , la même vaut encore pour  $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow 1$  (puisque l'image de  $F^n\hat{\pi}$  dans  $\pi$  est contenue dans, et même égale à,  $F^n\pi$ ).

On peut donc bien supposer que  $\pi''$  est libre, et qu'il existe une section  $s : \pi'' \rightarrow \pi$ , qui fait de  $\pi$  le produit semidirect  $\pi = \pi' \rtimes_* \pi''$  où  $*$  désigne l'action de  $\pi''$  sur  $\pi'$  définie par  $z * x = s(z) \times s(z)^{-1}$ , et  $\pi = \pi' \rtimes_* \pi''$ .

Fixons  $n$ . On veut montrer qu'il existe  $N$  tel que  $F^n\pi' \supseteq F^N\pi \cap \pi'$ , et expliquer pourquoi  $N$  se calcule sous la forme  $\tau(d', d'', n)$  en fonction de  $d', d''$  et  $n$ .

L'action de  $\pi''$  sur  $\pi'$  stabilise  $F^n\pi'$ , donc définit une action sur  $\pi'/F^n\pi'$ , et on a  $(\pi/F^n\pi) = (\pi'/F^n\pi') \rtimes_* \pi''$  pour cette action quotient.

Comme  $\pi'/F^n\pi'$  est fini,  $\text{Aut}(\pi'/F^n\pi')$  est lui-même fini, et comme  $\pi'' \rightarrow \text{Aut}(\pi'/F^n\pi')$  (donné par  $*$ ) est continu, et que les  $F^m\pi''$  forment un système fondamental de voisinages de l'unité dans  $\pi''$ , il existe  $m$  tel que  $F^m\pi''$  agisse trivialement sur  $\pi'/F^n\pi'$  (cf. [Neukirch et al., 2000, proposition 3.8.2]). On peut être plus précis : on a  $\#(\pi'/F^n\pi') \leq \psi(d', n)$  avec les notations du lemme, donc  $\#\text{Aut}(\pi'/F^n\pi') \leq \psi(d', n)!$ , donc  $\varphi(\psi(d', n)!) \pi''$  convient (en considérant l'image de  $\pi''$  dans  $\text{Aut}(\pi'/F^n\pi')$ ) — ce qui nous importe est qu'un  $m$  qui convient puisse être calculé en fonction de  $d'$  et  $n$ .

L'action de  $\pi''$  sur  $\pi'/F^n\pi'$  passe donc au quotient par  $F^m\pi''$ , c'est-à-dire définit une action de  $\pi''/F^m\pi''$  sur  $\pi'/F^n\pi'$ , et on a  $(\pi/F^n\pi)/s(F^m\pi'') = (\pi'/F^n\pi') \rtimes_* (\pi''/F^m\pi'')$  pour cette action quotientée.

Notons  $\tilde{\pi}$  ce  $\ell$ -groupe fini  $\pi/((F^n\pi') \cdot s(F^m\pi'')) = (\pi'/F^n\pi') \rtimes_* (\pi''/F^m\pi'')$ . Son ordre est majoré par  $\psi(d', n) \times \psi(d'', m)$  (et rappelons que  $m = \varphi(\psi(d', n)!) \pi''$  convient).

Il existe alors  $N \geq n, m$  tel que  $F^N\tilde{\pi} = 1$  : précisément,  $\varphi(\psi(d', n) \times \psi(d'', m))$  convient pour  $N$ . On a alors  $F^N\pi \subseteq (F^n\pi') \cdot s(F^m\pi'')$ , donc  $F^N\pi \cap \pi' \subseteq F^n\pi'$ , ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

**8.3. Corollaire.** *Soit  $\tilde{\pi}^{(n)} = \pi' / (\pi' \cap \pi^{[n]})$  le noyau de la surjection naturelle  $\pi^{(n)} \twoheadrightarrow \pi'^{(n)}$  et fixons  $j \in \mathbb{N}$ . Si le système inductif  $H^j(\pi^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  est explicitement essentiellement constant, il en est de même de  $H^j(\tilde{\pi}^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Cela résulte de la proposition précédente, réécrite sous la forme d'un diagramme commutatif (pour chaque  $n$ )

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi}^{(n)} & \xleftarrow{\quad} & \pi^{(n)} \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ \tilde{\pi}^{(\tau n)} & \xleftarrow{\quad} & \pi^{(\tau n)} \end{array}$$

et de 7.5.  $\square$

**8.4. Proposition.** *Soient  $L$  un pro- $\ell$ -groupe libre à  $r$  générateurs topologiques,  $n_0 \geq 1$  un entier et  $V$  un  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de  $L^{(n_0)}$ . Pour tout entier  $i$ , on peut calculer une paire  $(N, \varphi)$  telle que le système inductif  $H^i(L^{(n)}, V)$ ,  $n \geq n_0$ , soit  $(N, \varphi)$ -essentiellement constant.*

Dans cet énoncé,  $V$  est muni pour chaque  $n \geq n_0$  de l'action de  $L^{(n)}$  déduite de la surjection  $L^{(n)} \twoheadrightarrow L^{(n_0)}$ .

*Démonstration.* Distinguons trois cas :

- $i = 0$ . Le système inductif  $H^0(L^{(n)}, V)$  étant constant, la paire  $(n_0, \text{Id})$  convient.

$i = 1$ . Rappelons (cf. p. ex. [Serre, 1994, I.2.6 b]) que les flèches  $H^1(L^{(n)}, V) \rightarrow H^1(L^{(n+1)}, V)$  sont *injectives*, de sorte que la propriété 7.1 (i) est satisfaite pour  $\varphi = \text{Id}$ . (Notons que  $V$  est fixe par  $L^{[n]}/L^{[n+1]}$ .) Il reste à trouver  $N \geq n_0$  tel que la flèche (injective)  $H^1(L^{(N)}, V) \rightarrow H^1(L, V)$  soit un isomorphisme ou, de façon équivalente, tel que l'on ait l'égalité  $\#H^1(L^{(N)}, V) = \#H^1(L, V)$ . La conclusion résulte du fait que ces cardinaux sont calculables. Pour le terme de gauche c'est évident (cf. 6); pour le terme de droite, on utilise la formule d'Euler-Poincaré (due à Ogg et Šafarevič, cf. [Ogg, 1962, I]) :  $\#H^1(L, V) = (\#V)^{r-1} \times \#H^0(L, V)$ .

$i \geq 2$ . La colimite  $H^i(L, V)$  étant nulle (cf. [Serre, 1994, I.3.4]), il suffit de trouver  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $H^i(L^{(n)}, V) \rightarrow H^i(L^{(\varphi n)}, V)$  soit nulle pour chaque  $n \geq n_0$  et de poser, par exemple,  $N = n_0$ . Une telle fonction  $\varphi$  existe et est calculable car les objets et les flèches le sont.  $\square$

**8.5. Remarque.** Il est également possible de calculer une fonction  $\varphi$  telle que pour  $i \geq 2$ , les flèches  $H^i(L^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(L^{(\varphi(r, i, n))}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  soient nulles. Lorsque  $r = 1$  (cas d'un pro- $\ell$ -groupe abélien libre) ou bien lorsque  $i = 2$ , on peut vérifier que la fonction  $n \mapsto n + 1$  convient (cf. [Serre, 2013] pour le dernier cas). On peut conjecturer qu'il en est de même en général et envisager d'utiliser la proposition 4.1 de [Dwyer, 1975].

## 9. CALCUL DE LA COHOMOLOGIE DES $K(\pi, 1)$ PRO- $\ell$

**9.1.** Soit  $X$  une polycourbe  $\ell$ -élémentaire sur  $\text{Spec}(k)$ . D'après 4.3.6, c'est un  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$ , où  $\pi$  est le pro- $\ell$  complété du groupe fondamental de  $X$ . L'objectif de cette section est montrer que pour chaque  $r \geq 0$  on peut déterminer un couple  $(N, \varphi)$  tel que le système inductif  $(H^r(\pi^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))_{n \geq 0}$  — dont  $H^r(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  est la colimite — est  $(N, \varphi)$ -essentiellement constant.

**9.2. Récurrence.** On raisonne par récurrence sur la dimension de  $X$ . D'après *loc. cit.*, le groupe  $\pi$  s'insère dans une suite exacte  $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow 1$ , où  $\pi''$  est un pro- $\ell$  groupe libre non abélien et  $\pi'$  est une extension itérée de tels groupes. Cette suite exacte est d'*origine géométrique* c'est-à-dire déduite de morphismes de schémas (normaux connexes), calculables, par application du foncteur « groupe fondamental pro- $\ell$  ». Fixons  $j$  et considérons pour chaque  $n \geq 1$  la suite exacte  $1 \rightarrow \tilde{\pi}'^{(n)} \rightarrow \pi^{(n)} \rightarrow \pi''^{(n)} \rightarrow 1$  considérée en 8.3. L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que le système inductif  $H^j(\pi''^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  est explicitement essentiellement constant. D'après *loc. cit.*, il en est de même de  $V_n := H^j(\tilde{\pi}'^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ .

**9.3. Cas d'une courbe.** Soit  $V = \text{colim}_n V_n$ . L'action naturelle de  $\pi''$  sur ce  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -espace vectoriel de dimension finie, se factorise à travers un quotient  $\pi''^{(n_0)}$ , où  $n_0$  est un entier calculable. Fixons  $i$ . D'après 8.4, on peut calculer un couple  $(M, \psi)$  tel que le système  $H^i(\pi''^{(n)}, V)$ ,  $n \geq n_0$ , soit  $(M, \psi)$ -essentiellement constant. On passe des coefficients  $V$  à  $V_n$  de la façon suivante. Par hypothèse, il existe un entier  $N \geq n_0$  et une fonction strictement croissante  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tels que  $(V_n)_n$  soit  $(N, \varphi)$ -essentiellement constant. En particulier, le morphisme  $(V_n)_{n \geq N} \rightarrow (V_{\varphi(n)})_{n \geq N}$  se factorise à travers le morphisme  $(V_n)_n \rightarrow (V_n)$ , où  $(V_n)$  est le système inductif constant de valeur  $V$ . Passant à la cohomologie, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(\pi''^{(\bullet)}, V_{\bullet}) & \longrightarrow & H^i(\pi''^{(\bullet)}, V) \\ \downarrow & \swarrow h_{\bullet} & \downarrow \\ H^i(\pi''^{(\varphi \bullet)}, V_{\varphi \bullet}) & \longrightarrow & H^i(\pi''^{(\varphi \bullet)}, V) \end{array}$$

D'après 7.5, le système inductif  $H^i(\pi''^{(\bullet)}, V_{\bullet})$  est  $(\varphi M, \varphi \psi)$ -essentiellement constant.

**9.4. Suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre.** Revenons maintenant au calcul de la cohomologie du schéma  $X$ . On a

$$R\Gamma(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = R\Gamma(\pi, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = R\Gamma(\pi'', R\Gamma(\pi', \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})),$$

que l'on approxime par

$$R\Gamma(\pi^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = R\Gamma(\pi''^{(n)}, R\Gamma(\tilde{\pi}'^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$$

D'après [Serre, 1994, I.2.6]), on a pour chaque entier  $\lambda \geq 1$  une suite spectrale

$$E_{2, \lambda}^{i, j} = H^i(\pi''^{(\lambda)}, H^j(\tilde{\pi}'^{(\lambda)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{i+j}(\pi^{(\lambda)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

Il résulte de 7.4 et de ce qui précède que l'on peut trouver pour chaque entier  $r \geq 0$  un couple  $(N, \varphi)$  tel que  $H^r(\pi^{(\bullet)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  soit  $(N, \varphi)$ -essentiellement constant. En particulier, on peut calculer

$$H^r(\pi, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \text{Im}(H^r(\pi^{(N)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^r(\pi^{(\varphi N)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})).$$

**9.5. Remarque.** Tout ce qui précède s'applique également lorsque l'on remplace les coefficients  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$  ( $n \geq 1$ ).

## 10. DESCENTE

**10.1.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos,  $X$  un  $k$ -schéma algébrique, et  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $k$ . D'après 4.3.9, il existe un  $X$ -schéma simplicial  $X_{\bullet}$  calculant la cohomologie étale de  $X$  modulo  $\ell$ , dont les constituants sont des  $K(\pi, 1)$  pro- $\ell$  (non nécessairement connexes). On peut explicitement *construire* le  $N$ -squelette d'un tel schéma simplicial pour tout entier  $N$ . Par descente cohomologie et 4.3.4, les flèches ci-dessous sont des isomorphismes :

$$R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_{\bullet \text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} R\Gamma(X_{\bullet \ell \text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}),$$

où  $X_{\bullet \text{ét}}$  (resp.  $X_{\bullet \ell \text{ét}}$ ) désigne le topos total associé au système simplicial des topos  $X_{i \text{ét}}$  (resp.  $X_{i \ell \text{ét}}$ ),  $i \geq 0$ .

**10.2.** Pour chaque entier  $\lambda \geq 1$ , notons  $T^{(\lambda)} = X_{\bullet, \text{ét}}^{(\lambda)}$  le topos total du système simplicial des topos  $T_i^{(\lambda)} = X_{i, \text{ét}}^{(\lambda)}$  définis en 6.3. On complète cette notation par  $T^{(\infty)} := X_{\bullet, \text{ét}} = 2\text{-}\lim T^{(\lambda)}$ . On cherche à calculer, pour chaque entier  $n \geq 0$ , le groupe de cohomologie  $H^n(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = H^n(T^{(\infty)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ . Considérons pour chaque  $\lambda \geq 1$  la suite spectrale

$$E_{i, \lambda}^{i, j} = H^j(T_i^{(\lambda)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \Rightarrow H^{i+j}(T^{(\lambda)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

D'après les résultats de §9, on peut calculer un couple  $(N, \varphi)$  tel que les systèmes inductifs  $(E_{i, \lambda}^{i, j})_\lambda$  soient  $(N, \varphi)$ -essentiellement constants pour chaque  $i, j \geq 0$  tels que  $i + j < 2(2 \dim(X) + 1)$ . Il en résulte (7.4) que l'on peut calculer une paire  $(N_\infty, \varphi_\infty)$  tel que les systèmes inductifs  $H^n(T^{(\lambda)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  soient  $(N_\infty, \varphi_\infty)$ -essentiellement constants pour chaque  $n \leq 2 \dim(X)$ . Comme d'autre part,  $H^n(T^{(\infty)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \text{colim}_\lambda H^n(T^{(\lambda)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ , on en déduit — pour chaque  $n \leq 2 \dim(X)$  — la formule :

$$H^n(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \text{Im} (H^n(T^{(N_\infty)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(T^{(\varphi_\infty N_\infty)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})).$$

Les deux termes de droite, ainsi que la flèche, sont explicites : pour chaque  $\lambda \geq 1$ , le topos  $T^{(\lambda)}$  est le topos total d'un système simplicial de coproduits finis de topos classifiants de groupes finis que l'on peut calculer (§6) et la cohomologie d'un tel topos se calcule explicitement en utilisant par exemple [Deligne, 1974, 5.2.3.1] appliqué à la résolution de Godement (cochaînes).

## 11. FONCTORIALITÉ

**11.1.** Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $\ell$  un nombre premier et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de  $k$ -schémas algébriques. D'après 4.3.9, il existe un morphisme simplicial  $Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  au-dessus de  $f$  donnant lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} R\Gamma(T_X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma(X_\bullet, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \longrightarrow & R\Gamma(Y_\bullet, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xleftarrow{\sim} & R\Gamma(T_Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \\ & & \uparrow \sim & & \uparrow \sim & & \\ & & R\Gamma(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \longrightarrow & R\Gamma(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

**11.2.** D'après ce qui précède, il existe deux entiers explicites  $\lambda \leq \mu$  tels que pour chaque  $n \leq 2 \max\{\dim(X), \dim(Y)\}$ , on ait  $\text{Im} (H^n(T^{(\lambda)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(T^{(\mu)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) = H^n(T, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ , pour  $T = T_X$  ou  $T_Y$ . Le morphisme  $H^n(T_X^{(\mu)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(T_Y^{(\mu)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$  étant calculable (cf. 6.7), on a bien la fonctorialité.

## 12. IMAGE DIRECTE PAR UN MORPHISME PROPRE

**12.1. Faisceaux constructibles (esquisse).** Il existe plusieurs façons de décrire explicitement un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules, où  $\Lambda$  est un anneau commutatif fini, sur un schéma  $X$ . La description la plus proche de l'intuition que l'on s'en fait est en terme d'une stratification sur laquelle le faisceau est lisse et de flèches de recollement. (Si  $j : U \hookrightarrow X$  et  $i : F = X - U \hookrightarrow X$  est une stratification à deux strates, on se donne un faisceau localement constructible  $\mathcal{L}_U$  sur  $U$  (resp.  $\mathcal{L}_F$  sur  $F$ ) et une flèche  $\mathcal{L}_F \rightarrow i^* j_* \mathcal{L}_U$ ; cf. par exemple [SGA 4 VI. 9. 3]). Plus explicitement, on peut utiliser [SGA 4 IX. 2. 9 (ii)] d'après lequel les faisceaux  $\Lambda_U$ , pour  $U$  étale sur  $X$ , forment une famille de générateurs pour lesquels les Hom sont explicites. Duale (loc. cit. 2.14 (ii) ou [SGA 4 1/2 Arcata, IV. 3. 2]), les faisceaux produits finis  $\prod_i \pi_{i*} C_i$ , où chaque  $\pi_i : X_i \rightarrow X$  est un morphisme fini et  $C_i$  est un  $\Lambda$ -module constant, forment une famille cogénératrice. Enfin, un faisceau constructible sur  $X$  est représenté par un espace algébrique localement séparé, de type fini sur  $X$  (cf. par exemple [Artin, 1973, chap. VII], ou [Milne, 1980, chap. V, §1]). C'est probablement la description la plus simple.

**12.2. Effaçabilité.** Soit  $S$  un schéma noethérien et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de type fini. D'après une variante de [SGA 4 1/2 Arcata, IV. 3. 5], les foncteurs  $R^i f_*$  pour  $i > 0$  sont *effaçables* dans la catégorie des faisceaux constructibles sur  $X$  : pour chaque faisceau (abélien) constructible  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , il existe un plongement de  $\mathcal{F}$  dans un faisceau *constructible*  $\widetilde{\mathcal{F}}$  tel que le morphisme  $R^i f_* \mathcal{F} \rightarrow R^i f_* \widetilde{\mathcal{F}}$  soit nul. De plus, il est formel de vérifier que tout morphisme  $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  de faisceaux constructibles s'insère dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{F}}_1 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{F}}_2 \end{array}$$

où  $\widetilde{\mathcal{F}}_1$  (resp.  $\widetilde{\mathcal{F}}_2$ ) efface  $\mathcal{F}_1$  (pour  $R^i f_*$ ).

**12.3.** Soit  $\Lambda$  un anneau commutatif fini de cardinal inversible sur  $S$  et soit  $n > 1$  un entier. Supposons, par récurrence, que l'on sache calculer, fonctoriellement en  $\mathcal{F}$ , les  $R^i f_* \mathcal{F}$  pour chaque entier  $i < n$ , et chaque faisceau constructible  $\mathcal{F}$  de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . Considérons un faisceau constructible  $\mathcal{F}$  sur  $X$  et  $\mathcal{F} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$  un monomorphisme effaçant le foncteur  $R^i f_*$ . Notant  $\mathcal{G}$  le faisceau quotient  $\widetilde{\mathcal{F}}/\mathcal{F}$ , on a la suite exacte :

$$R^{i-1} f_* \widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow R^{i-1} f_* \mathcal{G} \rightarrow R^i f_* \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

La calculabilité (fonctorielle) de  $R^i f_* \mathcal{F}$  se ramène donc à la détermination explicite d'un monomorphisme  $\mathcal{F} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$  comme ci-dessus. Quitte à parcourir tous les monomorphismes, on se ramène au problème suivant : donné un plongement  $\mathcal{F} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$ , décider si la flèche  $R^i f_* \mathcal{F} \rightarrow R^i f_* \widetilde{\mathcal{F}}$  est nulle.

**12.4.** D’après 12.1, et la trivialité des  $R^j\pi_*$ ,  $j > 0$ , lorsque  $\pi$  est un morphisme fini, on peut supposer — quitte remplacer  $f$  par un composé  $f \circ \pi$  — que  $\mathcal{F}$  est le faisceau constant  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Faisant de même pour  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , on est ramené au problème suivant : étant donné un morphisme fini  $\pi : X' \rightarrow X$  et un  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules  $\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$ , décider si la flèche

$$\varphi : R^i f_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow R^i f'_* (\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}),$$

où  $f' = f \circ \pi'$ , est nulle.

**12.5.** On sait que l’on peut construire une stratification explicite  $\Pi_i S_i$  du schéma  $S$  telle que les deux faisceaux ci-dessus soit lisses sur les  $S_i$  ; c’est un corollaire immédiat des démonstrations « géométriques » de la constructibilité des images directes. (Voir [Illusie & Orgogozo, 2013] pour des variantes sur ce thème.) Tester si  $\varphi$  est nulle revient donc à tester si sa fibre est nulle tout point géométrique  $\bar{\eta}$  localisé en un point maximal  $\eta$  des  $S_i$ . Les points maximaux  $\eta$  sont en nombre fini. Lorsque  $f$  est *propre*, la nullité de  $\varphi_{\bar{\eta}}$  est équivalente à celle de la flèche de fonctorialité

$$H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X'_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}).$$

D’après le théorème 1.1, on peut décider si une telle flèche est nulle ou non.

## RÉFÉRENCES

- [Abbes & Gros, 2011] Abbes, A. & Gros, M. (2011). Topos co-évanescents et généralisations. Prépublication, arXiv:1107.2380v2. ↑8
- [Artin, 1973] Artin, M. (1973). *Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques*. Les presses de l’université de Montréal. ↑15
- [de Jong, 1996] de Jong, A. J. (1996). Smoothness, semi-stability and alterations. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, (83), 51–93. ↑9, 10
- [Deligne, 1974] Deligne, P. (1974). Théorie de Hodge. III. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, (44), 5–77. ↑9, 15
- [Deligne et al., 1982] Deligne, P., Milne, J., Ogus, A., & Shih, K.-y. (1982). *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*. Springer-Verlag, LNM 900. ↑7
- [Dixon et al., 1999] Dixon, J. D., du Sautoy, M. P. F., Mann, A., & Segal, D. (1999). *Analytic pro-p groups*, volume 61 des *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press, seconde édition. ↑11
- [Dwyer, 1975] Dwyer, W. G. (1975). Exotic convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Illinois J. Math.*, 19(4), 607–617. ↑14
- [Fried & Jarden, 2008] Fried, M. D. & Jarden, M. (2008). *Field arithmetic*, volume 11 des *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Berlin : Springer-Verlag, troisième édition. ↑5
- [Friedlander, 1982] Friedlander, E. M. (1982). *Étale homotopy of simplicial schemes*. Princeton, N.J. : Princeton University Press. ↑7, 8
- [Giraud, 1971] Giraud, J. (1971). *Cohomologie non abélienne*. Berlin : Springer-Verlag. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. ↑7, 8, 9, 10
- [Greuel & Pfister, 2008] Greuel, G.-M. & Pfister, G. (2008). *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Springer-Verlag, seconde édition. ↑6
- [Grothendieck, 1967] Grothendieck, A. (1960-1967). Éléments de géométrie algébrique. *Publications mathématiques de l’IHÉS*. numéros 4 (I) ; 8 (II) ; 11,17 (III) ; 20, 24 et 28 (IV), rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné. ↑6
- [Illusie & Orgogozo, 2013] Illusie, L. & Orgogozo, F. (2013). Sur les propriétés d’uniformité des images directes en cohomologie étale. ↑1, 16
- [Katz & Laumon, 1985] Katz, N. M. & Laumon, G. (1985). Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, (62), 361–418. ↑1
- [Lubotzky & Segal, 2003] Lubotzky, A. & Segal, D. (2003). *Subgroup Growth*, volume 212 des *Progress in Mathematics*. Birkhäuser. ↑13
- [Marker, 2002] Marker, D. (2002). *Model Theory : An Introduction*, volume 217 des *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑2, 4
- [Milne, 1980] Milne, J. S. (1980). *Étale cohomology*. Princeton, N.J. : Princeton University Press. ↑15
- [Mochizuki, 1999] Mochizuki, S. (1999). Extending families of curves over log regular schemes. *J. reine angew. Math.*, 511, 43–71. ↑7
- [Neukirch et al., 2000] Neukirch, J., Schmidt, A., & Wingberg, K. (2000). *Cohomology of Number Fields*, volume 323 des *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag. ↑11, 13
- [Odifreddi, 1989] Odifreddi, P. (1989). *Classical recursion theory*, volume 125 des *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland. ↑2
- [Odifreddi, 1999] Odifreddi, P. (1999). *Classical recursion theory II*, volume 143 des *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland. ↑2
- [Ogg, 1962] Ogg, A. P. (1962). Cohomology of abelian varieties over function fields. *Ann. of Math. (2)*, 76, 185–212. ↑14
- [Orgogozo, 2003] Orgogozo, F. (2003). Altérations et groupe fondamental premier à p. *Bull. Soc. math. France*, 131, 123–147. ↑7
- [Poonen et al., 2012] Poonen, B., Testa, D., & van Luijk, R. (2012). Computing Néron-Severi groups and cycle class groups. Prépublication, arXiv:1210.3720v3. ↑1
- [Serre, 1994] Serre, J.-P. (1994). *Cohomologie galoisienne (cinquième édition révisée et complétée)*, volume 5 des *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin : Springer-Verlag. ↑8, 14
- [Serre, 2013] Serre, J.-P. (2013). Lettre à F. Orgogozo (2013-3-19). ↑14
- [Stolzenberg, 1968] Stolzenberg, G. (1968). Constructive normalization of an algebraic variety. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74, 595–599. ↑6